



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА  
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ НА 1997—2000 ГОДЫ»

НОВЫЕ РАЗДЕЛЫ ФИЗИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Л. Е. ВОРОБЬЕВ, Е. Л. ИВЧЕНКО,  
Д. А. ФИРСОВ, В. А. ШАЛЫГИН

# ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУР

Под общей редакцией  
В. И. Ильина и А. Я. Шика

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших  
учебных заведений, обучающихся по направлению  
"Техническая физика"*



Санкт-Петербург  
«Наука»  
2001

УДК 537 33; 537 311

ББК 22.379

В 75

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997—2000 годы»*

**Воробьев Л. Е., Ивченко Е. Л., Фирсов Д. А., Шалыгин В. А. Оптические свойства наноструктур: Учеб. пособие / Под ред. Е. Л. Ивченко и Л. Е. Воробьева. СПб.: Наука, 2001. — 188 с., ил. 46.**

ISBN 5-02-024

Книга посвящена новой дисциплине в оптической спектроскопии твердого тела, изучающей взаимодействие электромагнитного излучения с низкоразмерными полупроводниковыми системами. Пособие предназначено для студентов старших курсов физических факультетов и аспирантов, специализирующихся в области физики твердого тела.

#### **Рецензенты**

д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН Р. А. СУРИС,  
д-р физ.-мат. наук, проф. Б. В. НОВИКОВ

**Под редакцией Е. Л. ИВЧЕНКО и Л. Е. ВОРОБЬЕВА**

Без объявления

ISBN 5-02-024

© Центр «Интеграция», 2001

© Л. Е. Воробьев, Е. Л. Ивченко,  
Д. А. Фирсов, В. А. Шалыгин, 2001

## ВВЕДЕНИЕ

Богатая цветовая гамма растительного и животного мира: волшебные краски неба, радуги, восхода и захода солнца, эффекты тени, смены дня и ночи, притягательная сила огня и раскаленного металла, многоцветие орнаментов национальных одежд, посуды, витражей... Можно долго перечислять примеры нашего повседневного соприкосновения с миром оптических явлений, которое начинается с раннего детства. Это и неудивительно, так как зрение человека основано на закономерностях взаимодействия света с веществом. Оптические свойства твердых тел являются предметом пристального научного и технологического интереса на протяжении последних трех-четырех столетий, хотя эти свойства широко использовались для решения определенных декоративных задач еще со времен ранних цивилизаций: уже древние художники, создатели наскальных изображений, находили эффектные цветовые решения путем смешивания различных природных пигментов. Начиная с открытия Снеллиусом в 1621 г. закона преломления света оптическая спектроскопия прошла полный драматизма и внутренних противоречий путь развития. За исследованиями явлений отражения и преломления света последовал этап повышенного внимания к интерференции, дифракции и поляризации света, а затем пришло время для целенаправленного изучения поглощения, флюоресценции (люминесценции), рассеяния света и нелинейных оптических эффектов. Длительное соперничество между корпускулярной и волновой теориями света увенчалось компромиссом, основанным на концепции дуализма, и открытием законов квантовой механики и квантовой электродинамики. Создание лазерных источников и совершенствование методов детектирования электромагнитного излучения превратили спектроскопию в мощный метод исследования физических свойств твердого тела и протекающих в нем элементарных процессов. Более того, вряд ли можно представить сегодня наши познания о микромире без средств, которые обеспечиваются спектроскопией видимого, инфракрасного,

радиочастотного, микроволнового, ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов оптического излучения.

Наряду с тем что оптические явления в полупроводниках представляют самостоятельный раздел физики полупроводников и используются в разных методах определения многочисленных параметров полупроводниковых материалов, они служат базой для создания множества оптоэлектронных приборов. Оптике полупроводников и полупроводниковой оптоэлектронике посвящен ряд книг, учебников, обзорных статей.

Физика полупроводников последних 10—15 лет, благодаря успехам технологии и прежде всего метода МВЕ (Molecular Beam Epitaxy — молекулярно-лучевая эпитаксия), это главным образом физика полупроводниковых низкоразмерных структур (наноструктур). В наноструктурах движение носителей заряда ограничено хотя бы вдоль одной из координат. Это ведет к размерному квантованию, которое кардинально меняет энергетический спектр носителей заряда, фононов, квазичастиц, и возникновению целого ряда новых физических явлений и свойств полупроводниковых наноструктур, в том числе и оптических. Исследование оптических явлений в наноструктурах расширяет наши знания об оптике полупроводников. Кроме того, наноструктуры — хороший объект для создания новых перспективных приборов, таких как лазеры на квантовых ямах и квантовых точках, работающие в видимом, ближнем и среднем инфракрасных диапазонах, а также источники излучения терагерцового диапазона, новые фотоприемники и быстродействующие модуляторы излучения. Такие приборы уже созданы, и идет интенсивная разработка новых оптоэлектронных приборов.

Важное достоинство наноструктур связано с тем, что, изменяя геометрические размеры и конфигурацию нанообъектов, можно управлять свойствами системы. Открывается широкая возможность конструирования (engineering) параметров структур и прежде всего энергетического спектра носителей заряда и фононов, а следовательно, и оптических свойств наноструктур. Физика наноструктур — быстроразвивающаяся научная область. Уже появилось множество книг и обзоров по физическим явлениям в наноструктурах [1—4]. К сожалению, это главным образом литература, изданная за рубежом и поэтому малодоступная российским студентам. Настоящее пособие посвящено описанию некоторых основных оптических явлений в наноструктурах, в том числе и таких, которые только начинают активно изучаться.

Книга предназначена для студентов старших курсов физических факультетов и аспирантов, специализирующихся в области физики твердого тела, а также для всех желающих познакомиться

ся с новой научной дисциплиной в оптической спектроскопии твердого тела, изучающей взаимодействие электромагнитного излучения с низкоразмерными полупроводниковыми системами.

Главы 1, 2, 4, 5, 6 и п. 3.5 написаны Е. Л. Ивченко, параграфы 3.1—3.4 написаны Л. Е. Воробьевым, Д. А. Фирсовым и В. А. Шалыгиным. Общая редакция осуществлена Е. Л. Ивченко и Л. Е. Воробьевым. Авторы считают приятным долгом выразить благодарность А. В. Васильеву за техническое редактирование рисунков. Работе Е. Л. Ивченко над данным учебным пособием помогла благородная и неустанная деятельность В. В. Новиковой.

# 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ГЕТЕРОСТРУКТУР

## 1.1. Гетероструктуры: иерархия понятий

В настоящее время сложилась система понятий и терминов низкоразмерной физики полупроводников. Сформирована систематика квантово-размерных структур (в скобках указаны термины и соответствующие им сокращения на английском языке):

- квантовые ямы (*quantum wells*, QWs);
- квантовые проволоки (*quantum wires* и *quantum well wires*, QWWs);
- квантовые точки (*quantum dots*, QDs);
- сверхрешетки (*superlattices*, SLs);
- двух- и трехбарьерные резонансно-туннельные структуры (*double- and triple-barrier resonance-tunneling structures*);
- одиночная квантовая яма (*single quantum well*, SQW);
- двойная квантовая яма (*double quantum well*);
- антиточки (*antidots*);
- дельта-легированные структуры ( $\delta$ -*doped structures*);
- квантовые микрорезонаторы (*quantum microcavities*);
- фотонные кристаллы (*photonic crystals*);
- гетероструктуры типов I и II (*type-I and type-II heterostructures*);
- пористые полупроводниковые материалы;
- фуллерены, нанокластеры, нанотрубки, наноконтакты...

Различают следующие квантовые состояния в наноструктурах:

- размерно-квантованные состояния свободных носителей и экситонов;
- подзоны и минизоны;
- размерно-квантованные оптические фононы, интерфейсные фононы, акустические фононы с «ломаным» спектром (*folded acoustic phonons*);
- двумерный магнитный полярон;

— композитные фермионы и краевые состояния в квантовом эффекте Холла ...

Перечислим и кратко охарактеризуем различные гетероструктуры в определенной последовательности, позволяющей легче уяснить связь и различие между понятиями. Энергетическая схема типичных многослойных гетероструктур изображена на рис. 1—4. Верхняя и нижняя линии показывают координатную зависимость положения дна зоны проводимости и потолка валентной зоны в направлении главной оси структуры, или оси роста. Удобно стартовать с одиночного гетероперехода (*single heterojunction*, рис. 1) между двумя компози-

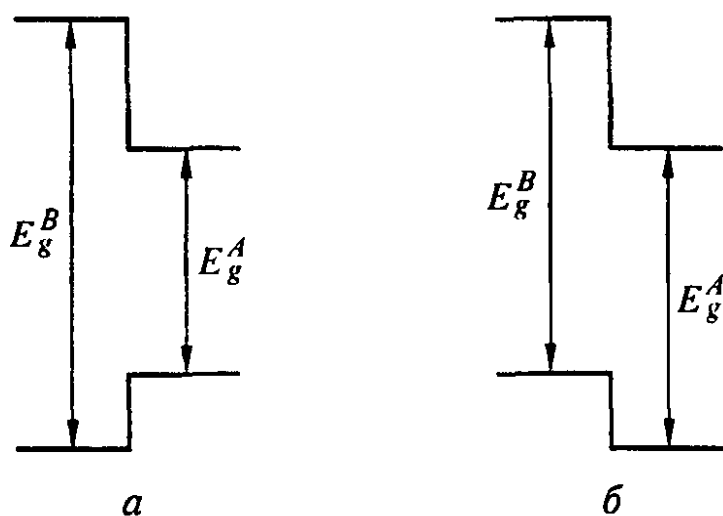


Рис. 1. Зонная схема одиночного гетероперехода типа I (а) и типа II (б).

ционными материалами — полупроводниками  $A$  и  $B$ . Один или оба композиционных материала могут быть твердыми растворами. Приведем примеры гетеропар  $A/B$ :  $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ,  $\text{CdTe}/\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$ ,  $\text{InAs}/\text{AlSb}$ ,  $\text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Se}/\text{ZnS}_y\text{Se}_{1-y}$ ,  $\text{ZnSe}/\text{BeTe}$ ,  $\text{ZnSe}/\text{GaAs}$ ,  $\text{Ga}_{1-x}\text{In}_x\text{As}/\text{InP}$ ,  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x/\text{Si}_{1-y}\text{C}_y$ ,  $\text{In}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}/\text{Ga}_{1-y}\text{Al}_y\text{As}$  и т. д., где  $x, y$  или  $1-x, 1-y$  означают долю атомов определенного сорта в узлах кристаллической решетки или какой-либо из подрешеток. Различают гетеропереходы первого и второго типа в зависимости от того, лежит запрещенная зона  $E_g$  одного из композиционных материалов внутри запрещенной зоны другого материала, как например для гетеропары  $\text{GaAs}/\text{Al}_{0.35}\text{Ga}_{0.65}\text{As}$  (рис. 1, а), или дно зоны проводимости ниже в одном, а потолок валентной зоны выше в другом материале, как в случае  $\text{InAs}/\text{AlSb}$  или  $\text{ZnSe}/\text{BeTe}$  (рис. 1, б).

Помимо гетеропереходов типа II с перекрывающимися запрещенными зонами, имеются гетеропереходы типа II, у которых запрещенные зоны не перекрываются и дно зоны проводи-

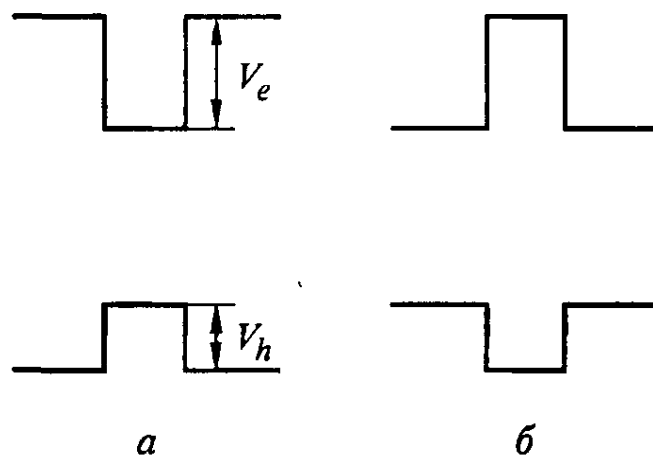


Рис. 2. Зонная схема структуры с одиночной квантовой ямой (а) и одиночным барьером (б).

$V_{e,h}$  — высота потенциального барьера (или разрыв зон) на интерфейсе в зоне проводимости и валентной зоне соответственно.

мости в одном материале лежит ниже потолка валентной зоны в другом материале (например, в InAs/GaSb). Гетеропереход, в котором один из слоев является бесщелевым полупроводником, отнесем к третьему типу (например, HgTe/CdTe).

Двойной гетеропереход (*double heterojunction*) первого рода  $B/A/B$  представляет структуру с одиночной квантовой ямой, если ширина запрещенной зоны в материале  $A$  меньше таковой в материале  $B$ , т. е.  $E_g^A < E_g^B$ , или структуру с одиночным барьером, если  $E_g^A > E_g^B$ . В первом случае внутренний слой  $A$  образует потенциальную яму, в которой происходит размерное квантование электронных и дырочных состояний (рис. 2, а). Во втором случае слой  $A$  образует потенциальный барьер для электронов и дырок (рис. 2, б). Ясно, что двойной гетеропереход второго рода является структурой с квантовой ямой для одного сорта носителей и одновременно структурой с одиночным барьером для другого сорта носителей. На рис. 2, а схематически показана структура с прямоугольной ямой. Используя в качестве композиционного материала  $A$  твердый раствор и изменяя его состав в процессе роста, можно создавать ямы другой формы — параболические, треугольные и т. п.

Логическим развитием однобарьерной структуры являются двухбарьерные (рис. 3, а) и трехбарьерные (рис. 3, б) структуры, т. е. одиночная или двойная квантовые ямы, отделенные барьерами конечной ширины от полубесконечных слоев с меньшей запрещенной зоной. Естественным продолжением структуры с одиночной квантовой ямой является структура с двумя (рис. 3, в), тремя или целым набором квантовых ям (*multiple quantum wells*, MQWs) (рис. 4). С точки зрения электронных свойств каждая из этих ям является изолированной, однако наличие многих ям существенно проявляется в оптических свойствах.



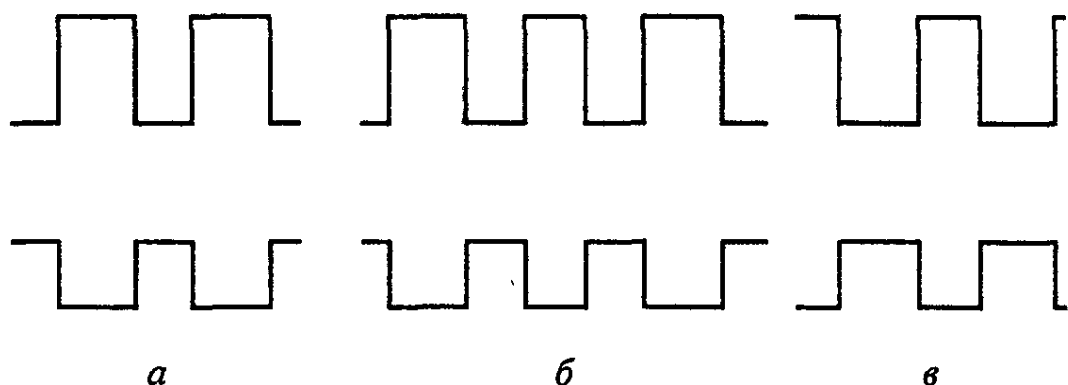


Рис. 3. Зонная схема двухбарьерной (а) и трехбарьерной (б) структуры, а также структуры с двумя квантовыми ямами (в).

Периодическая структура с квантовыми ямами, разделенными не очень широкими барьерами, называется *сверхрешеткой* (рис. 4). Термин «сверхрешетка» используется тогда, когда носитель заряда — электрон или дырка — может сравнительно легко туннелировать из одной ямы в другую и длина свободного пробега этого носителя вдоль оси роста (или длина когерентного движения) превышает период структуры  $d$ . В результате энергетические уровни изолированной ямы размываются в одномерные минизоны. Длины свободного пробега для носителей разного вида могут существенно различаться, например в силу различия эффективных масс электронов и дырок. Поэтому одна и та же периодическая структура с квантовыми ямами может быть как сверхрешеткой для одного вида носителей, скажем для электронов, у которых, как правило, эффективная масса меньше, так и структурой с набором изолированных ям, называемой еще толстобарьерной сверхрешеткой, для другого вида носителей. Последние также могут перемещаться вдоль оси роста, однако это движение носит не когерентный характер, а представляет собой цепочку некогерентных туннельных прыжков между соседними ямами.

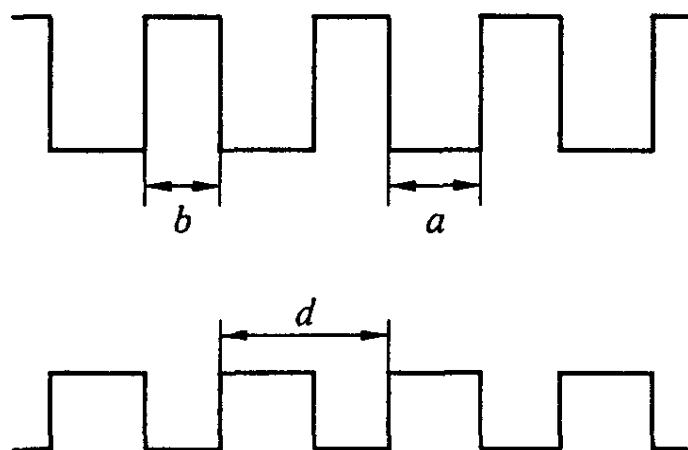


Рис. 4. Зонная схема периодической структуры с квантовыми ямами (когда барьеры широкие) или сверхрешетки (когда барьеры тонкие).

Следующее понятие — «ультратонкая сверхрешетка», отдельный слой которой содержит несколько моноатомных (композиционный материал — элементарный полупроводник) или мономолекулярных (композиционный материал — полупроводниковое соединение) слоев, так, например, периодическая гетероструктура  $(\text{GaAs})_n (\text{AlAs})_m$ , где  $n, m = 2 \div 4$ . Строго говоря, по определению сверхрешетки толщина ее слоев должна существенно превышать постоянную кристаллической решетки, чтобы для описания электронных состояний можно было использовать метод эффективной массы или, в более широком смысле, метод плавных огибающих. Тем не менее ультратонкая сверхрешетка, а также полупроводниковые соединения типа  $(\text{GaAs})_1 (\text{AlAs})_1$ , т. е.  $\text{GaAlAs}_2$ , включаются в поле зрения физики низкоразмерных систем как предельный случай сверхрешетки при  $d \rightarrow 0$ .

Структура с квантовой ямой — это пример системы с пониженной размерностью, точнее пример двумерной системы, движение электрона в которой ограничено только в одном из направлений, а в двух других — электрон может свободно перемещаться. В результате возникает пространственное квантование: энергетический спектр по одному из квантовых чисел из непрерывного становится дискретным. Иногда вместо слов «двумерная система» употребляют термин «квазидвумерная система», подразумевая, что размерно-квантованные состояния имеют конечную протяженность и в третьем измерении, т. е. в направлении оси роста. Системы, у которых движение электронов ограничено в двух направлениях, называются *квантовыми проволоками*, а системы, у которых пространственное квантование идет по всем трем направлениям и энергетический спектр дискретен, называются *квантовыми точками*. Для наблюдения пространственного квантования необходимо, чтобы расстояние между противоположными потенциальными барьерами было существенно меньше длины свободного пробега электрона. Это накладывает ограничения как на геометрические размеры низкоразмерной системы, так и на качество образцов и температуру, определяющие длину свободного пробега.

## 1.2. Классификация сверхрешеток

Проведем классификацию полупроводниковых сверхрешеток.

**Композиционные сверхрешетки** (*compositional SLs*) — это сверхрешетки, у которых чередующиеся слои выращены из разных материалов. Первоначально для создания квантовых ям и

сверхрешеток подбирались гетеропары с практически одинаковыми постоянными решеток  $a_0$ . Сверхрешетка называется *согласованной*, или *ненапряженной*, если относительное рассогласование постоянных решеток  $\Delta a_0 / a_0 \ll 0.01$  (*lattice-matched SLs*). Совершенствование технологии роста позволило получить бездислокационные сверхрешетки и при заметном рассогласовании постоянных решеток:  $\Delta a_0 / a_0 \geq 0.01$ . В таких многослойных структурах возникают внутренние напряжения, приводящие к сжатию одного из слоев и растяжению другого. Они получили название *напряженных* сверхрешеток (*strained SLs*). Композиционные сверхрешетки могут принадлежать к типу I или типу II, быть нелегированными, однородно или селективно легированными.

Наряду с композиционными сверхрешетками, образованными периодическим изменением состава, сверхрешетки могут создаваться модулированным легированием донорной или/и акцепторной примесью. Такие сверхрешетки называются **легированными**. Такой, например, является сверхрешетка *n*-GaAs/*p*-GaAs, или *nipi*-структура. Имеются также *спиновые* сверхрешетки, в которых часть слоев содержит магнитные примеси или ионы, например CdTe/CdMnTe. Спиновые сверхрешетки, в которых содержание магнитных ионов значительно, можно называть также композиционными полумагнитными сверхрешетками.

Плавным изменением состава в пределах слоя *A* или *B* можно создавать сверхрешетки с ямами и барьерами произвольной формы, например пилообразные сверхрешетки.

Наряду с периодическими создаются и исследуются апериодические сверхрешетки. Примером апериодической структуры является решетка Фибоначчи (Fibonacci), у которой толщины слоев *A* и *B* меняются по закону  $a_j = G_j a_0$ ,  $b_j = G_{j-1} b_0$ , а числа  $G_j$  задаются начальными значениями  $G_0 = G_1 = 1$  и рекуррентным соотношением  $G_j = G_{j-1} + G_{j-2}$  ( $j \geq 2$ ). В частности,  $G_2 = 2$ ,  $G_3 = 3$ ,  $G_4 = 5$ ...

## **2. ЭЛЕКТРОНЫ, ФОНОНЫ, ФОТОНЫ И ЭКСИТОНЫ В НАНОСТРУКТУРАХ**

В настоящее время разработаны изощренные методы компьютерного расчета квантовых состояний в наноструктурах, основанные на микроскопических моделях псевдопотенциала или сильной связи. Тем не менее эти методы пока не всемогущи и не всеобъемлющи, и, как подтверждает и история развития физики объемных полупроводников, при конкретной работе именно приближенные методы эффективной массы (в случае простых энергетических зон), эффективного гамильтониана (для вырожденных зон) и плавных огибающих (в многозонной модели, например в модели Кейна) оказываются более удобными и результативными. В приближенных подходах решение внутри каждого слоя многослойной структуры (или композиционной области меньшей размерности в квантовых проволоках или точках) записывается в виде линейной комбинации независимых объемных решений, а для сшивки на гетерограницах вводятся граничные условия для огибающих волновой функции электрона и их производных по нормальной координате.

### **2.1. Размерное квантование электронных состояний в квантовых ямах**

Расчеты электронных состояний в полупроводниковых наноструктурах, выполняемые в методе эффективной массы, выглядят часто как практические занятия по квантовой механике. Мы начнем с простейшей модели структуры с квантовой ямой, в которой барьеры считаются бесконечно высокими. Огибающая волновой функции электрона записывается в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i(q_x x + q_y y)} \varphi(z), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  — двумерный волновой вектор, характеризующий движение электрона в плоскости интерфейса. В структуре  $B/A/B$  функция  $\varphi(z)$  удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m_A} \frac{d^2}{dz^2} \varphi(z) = E_z \varphi(z),$$

где  $m_A$  — эффективная масса электрона в материале  $A$ . Вне слоя  $A$  функция  $\varphi(z)$  равна тождественно нулю. Полная энергия электрона  $E$  складывается из энергии размерного квантования  $E_z$  и кинетической энергии  $E_{xy} = \hbar^2 q^2 / 2m_A$  (значения  $E$  отсчитываются от дна зоны проводимости материала  $A$ ). Начало отсчета на оси  $z$  выбирается в середине слоя  $A$ . Тогда граничные условия для  $\varphi$  в приближении бесконечно высоких барьеров записываются в виде

$$\varphi\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0, \quad (2.2)$$

где  $a$  — ширина слоя  $A$ , тогда  $\pm a/2$  — координаты интерфейсов. Система обладает симметрией к отражению  $z \rightarrow -z$ . Поэтому совокупность собственных решений уравнения Шредингера разбивается на подгруппы четных и нечетных решений, имеющих соответственно вид  $C \cos kz$  и  $C \sin kz$ , где  $k = (2m_A E_z / \hbar^2)^{1/2}$ ;  $C$  — нормировочный коэффициент. С учетом граничных условий получаем:

$$k = \frac{v\pi}{a}, \quad E_z = \frac{\hbar^2}{2m_A} \left( \frac{v\pi}{a} \right)^2, \quad (2.3)$$

где  $v = 1, 3, \dots$  для четных и  $v = 2, 4, \dots$  для нечетных решений. Соответствующие размерно-квантованные электронные и дырочные состояния будем обозначать в виде  $ev$  и  $hv$ . Энергетический спектр состоит из ветвей

$$E_{evq} = \frac{\hbar^2}{2m_A} \left[ \left( \frac{v\pi}{a} \right)^2 + q^2 \right], \quad (2.4)$$

называемых *подзонами размерного квантования*, или просто *подзонами*.

**Барьеры конечной высоты,  $q = 0$ .** При конечной высоте барьеров огибающая  $\varphi$  отлична от нуля в слоях  $B$  и удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{d^2}{dz^2} + V \right) \varphi(z) = E_z \varphi(z),$$

где потенциальный барьер  $V$  равен разрыву  $\Delta E_c$  зоны проводимости на интерфейсе. Для простой зонной структуры граничные условия на интерфейсе между слоями  $A$  и  $B$  в общем случае можно представить в виде

$$\varphi_A = t_{11} \varphi_B + t_{12} \tilde{\varphi}_B, \quad \tilde{\varphi}_A = t_{21} \varphi_B + t_{22} \tilde{\varphi}_B, \quad (2.5)$$

где  $\varphi_{A,B}$  — значение огибающей на интерфейсе со стороны слоя  $A$  или  $B$ :

$$\tilde{\varphi}_A = l \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_A, \quad \tilde{\varphi}_B = l \frac{m_A}{m_B} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_B,$$

$m_{A,B}$  — эффективная масса;  $l$  — произвольный параметр с размерностью длины, введенный для того, чтобы обезразмерить матричные элементы  $t_{ij}$ . Матрица  $\hat{t}$  унимодулярна, т. е. удовлетворяет условию  $t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$ . При резком переходе от слоя  $A$  к слою  $B$  задача определения матрицы  $\hat{t}$  для конкретной пары  $A/B$  находится за пределами компетенции метода плавных огибающих. Поэтому выбор значений  $t_{ij}$  постулируется или осуществляется путем сравнения с результатами эксперимента или расчета в рамках какой-либо микроскопической модели. Чаще других используются граничные условия, связанные с именем Бастарда (Bastard):

$$\varphi|_A = \varphi|_B, \quad \frac{1}{m_A} \frac{d\varphi}{dz} \Big|_A = \frac{1}{m_B} \frac{d\varphi}{dz} \Big|_B. \quad (2.6)$$

Этот частный случай граничных условий (2.5) для  $t_{11} = t_{22} = 1$ ,  $t_{12} = t_{21} = 0$  находится в удовлетворительном согласии с микроскопическими расчетами.

Четное решение записывается в виде

$$\varphi(z) = \begin{cases} C \cos kz & \text{при } |z| \leq \frac{a}{2}; \\ D \exp \left[ -\kappa \left( |z| - \frac{a}{2} \right) \right] & \text{при } |z| \geq \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь  $\kappa = [2m_B(V - E_z)/\hbar^2]^{1/2}$  и учтено, что для размерно-квантованных состояний энергия  $E_z$  меньше  $V$  и волновой вектор в слоях  $B$  мнимый:  $k_B = i\kappa$ . Из системы уравнений (2.6), которую можно записать с учетом (2.7) как

$$C \cos k \frac{a}{2} = D, \quad -\frac{k}{m_A} C \sin k \frac{a}{2} = -\frac{\varkappa}{m_B} D, \quad (2.8)$$

получаем трансцендентное уравнение для энергии четных состояний:

$$\operatorname{tg} k \frac{a}{2} = \eta \equiv \frac{m_A}{m_B} \frac{\varkappa}{k}. \quad (2.9)$$

Аналогичное уравнение для нечетных решений имеет вид

$$\operatorname{ctg} k \frac{a}{2} = -\eta. \quad (2.10)$$

Приведенные выше формулы применимы и при отличном от нуля волновом векторе  $q$ , если под  $k$  и  $\varkappa$  понимать величины

$$k = \left( \frac{2m_A E}{\hbar^2} - q^2 \right)^{1/2}, \quad \varkappa = \left[ \frac{2m_B (V - E)}{\hbar^2} + q^2 \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

Известно, что в симметричной одномерной потенциальной яме всегда имеется хотя бы одно размерно-квантованное состояние. Поэтому при конечной высоте барьеров энергетический спектр электрона состоит из конечного числа подзон размерного квантования  $e\nu$  и континуума (состояния с  $E - (\hbar^2 q^2 / 2m_B) > V$ ). При совпадающих эффективных массах  $m_A$  и  $m_B$  зависимость  $E_{e\nu q}$  от  $q$  параболическая, как в однородных композиционных материалах. При относительно небольшом различии между  $m_A$  и  $m_B$  дисперсия подзон  $e\nu$  близка к параболической.

Проанализируем предельный переход от конечных к бесконечно высоким барьерам. С этой целью будем считать величину  $V$  достаточно большой, так что выполнено неравенство

$$V \gg \frac{\hbar^2}{2m_A} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (2.12)$$

Тогда для основного состояния  $e1$  величину  $\varkappa$  можно приближенно заменить на  $\varkappa_0 = (2m_A V / \hbar^2)^{1/2}$  и рассматривать отношение  $k/\varkappa_0$  в качестве малого параметра. Перепишем уравнение (2.9) в эквивалентной форме  $\operatorname{ctg} (ka/2) = (m_B k / m_A \varkappa)$ . В нулевом приближении по параметру  $k/\varkappa_0$  для состояния  $e1$  получим  $ka/2 = \pi/2$  или  $k = \pi/a$ , что отвечает предельному переходу  $V \rightarrow \infty$  и совпадает с (2.3) при  $\nu=1$ . Представив  $k$  в виде  $\pi/a - \delta k$ , находим в первом приближении:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_A} \left[ q^2 + \left( \frac{v_x \pi}{a_x} \right)^2 + \left( \frac{v_y \pi}{a_y} \right)^2 \right]. \quad (2.15)$$

**Квантовые точки в форме прямоугольного параллелепипеда  $a_x \times a_y \times a_z$ .** Приведем выражения для огибающей волновой функции и энергии электрона для случая бесконечно высоких барьеров:

$$\psi(\mathbf{r}) = \varphi_{v_x}(x, a_x) \varphi_{v_y}(y, a_y) \varphi_{v_z}(z, a_z),$$

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_A} \sum_{j=x,y,z} \left( \frac{v_j}{a_j} \right)^2. \quad (2.16)$$

**Сферические квантовые точки радиуса  $R$ .** Основное состояние обладает сферической симметрией и в случае барьеров конечной высоты описывается волновой функцией:

$$\psi(\mathbf{r}) = C r^{-1} \begin{cases} \sin kr & \text{при } r \leq R; \\ \sin kR e^{-\kappa(r-R)} & \text{при } r \geq R, \end{cases} \quad (2.17)$$

где  $C$  — нормировочный коэффициент;

$$k = (2m_A E / \hbar^2)^{1/2}; \quad \kappa = [2m_B (V - E) / \hbar^2]^{1/2}. \quad (2.18)$$

Энергия размерного квантования  $E$  удовлетворяет уравнению

$$1 - kR \operatorname{ctg} kR = \frac{m_A}{m_B} (1 + \kappa R).$$

**Цилиндрические квантовые проволоки.** В случае барьеров конечной высоты огибающая волновой функции для основного состояния с  $q = 0$  выражается через функции Бесселя  $J_0(x)$  и  $K_0(x)$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} C J_0(k\rho) & \text{при } r \leq R, \\ D K_0(\kappa\rho) & \text{при } r \geq R, \end{cases} \quad (2.19)$$

где  $D = C J_0(kR) / K_0(\kappa R)$ .

**Энергетическая плотность состояний.** Рассмотрим энергетический спектр  $E_{nk}$  квазичастицы в пространстве размерности  $d = 3, 2, 1$  и  $0$ , где  $n$  — дискретное квантовое число или набор таких чисел,  $\mathbf{k}$  —  $d$ -компонентный волновой вектор; при  $d = 0$  вол-



$$\delta k \frac{a}{2} \approx \frac{m_B}{m_A} \frac{\pi}{\varepsilon_0 a} \quad \text{или} \quad k \approx \frac{\pi}{a} \left( 1 - \frac{m_B}{m_A} \frac{2}{\varepsilon_0 a} \right) \quad \text{и}$$

$$E_{e1} \approx \frac{\hbar^2}{2m_A} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{m_B}{m_A} \frac{4}{\varepsilon_0 a} \right). \quad (2.13)$$

Так как обычно массы  $m_A$  и  $m_B$  сопоставимы, критерием применимости формулы (2.13) является неравенство  $\varepsilon_0 a \gg 4$ . Таким образом, понятия «высокий барьер», «низкий барьер» относительны и при достаточно широкой яме формула (2.13) применима даже для гетероструктур с явно небольшим разрывом зон.

## 2.2. Квантовые проволоки и квантовые точки

В квантовой яме носитель может свободно перемещаться в двух направлениях. Поэтому о структуре с квантовой ямой говорят как о двумерной системе или квазидвумерной системе, в последнем случае имея в виду, что размерно-квантованные состояния имеют конечную протяженность и в третьем направлении, т. е. в направлении оси роста. Рассмотрим теперь кратко квантование электронных состояний в квантовых проволоках (система размерности  $d = 1$ ) и квантовых точках ( $d = 0$ ), в которых свободное движение возможно только в одном направлении или вообще отсутствует.

**Проволоки с прямоугольным сечением  $a_x \times a_y$ .** Для случая бесконечно высоких барьеров огибающая волновой функции электрона имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = (1/\sqrt{L}) e^{iqz} \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = \varphi_{v_x}(x, a_x) \varphi_{v_y}(y, a_y),$$

где  $L$  — длина проволоки;  $1/\sqrt{L}$  — нормировочный коэффициент;  $q$  — волновой вектор, характеризующий свободное движение вдоль главной оси проволоки;

$$\varphi_v(x, a) = \sqrt{\frac{2}{a}} \begin{cases} \cos \frac{vx}{a} & \text{при нечетном } v; \\ \sin \frac{vx}{a} & \text{при четном } v. \end{cases} \quad (2.14)$$

Для энергии электрона в подзоне  $ev_x v_y$  в состоянии с волновым вектором  $q$  имеем

новой вектор как величина, характеризующая квантовые состояния, отсутствует. Энергетической плотностью состояний назовем число квантово-механических состояний, приходящихся на единичный интервал энергии и на единичный объем  $d$ -мерного пространства. С помощью аппарата  $\delta$ -функций плотность состояний можно представить в виде

$$g_d(E) = \frac{2}{V_d} \sum_{nk} \delta(E - E_{nk}), \quad (2.20)$$

где множитель 2 учитывает двукратное вырождение электронных состояний по спину;  $V_d$  — обобщенный объем, который при  $d = 3$  является объемом образца в обычном понимании этого слова, а для полупроводниковых низкоразмерных систем этот объем равен площади образца в плоскости интерфейсов в случае квантовых ям ( $d = 2$ ), длине квантовой проволоки ( $d = 1$ ) и просто единице для квантовой точки ( $d = 0$ ). Разложим  $E_{nk}$  в ряд по степеням  $\mathbf{k}$  и ограничимся квадратичным приближением:

$$E_{nk} = E_n^0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2 M_n},$$

где имеющий размерность массы параметр  $M_n$  принимает значения между  $m_A$  и  $m_B$ . Подставляя это разложение в (2.20), получаем выражение для вклада ветви  $n$  в плотность состояний:

$$g_3(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2 M_n}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \theta(E - E_n^0), \quad (2.21a)$$

$$g_2(E) = \frac{M_n}{\pi \hbar^2} \theta(E - E_n^0), \quad (2.21б)$$

$$g_1(E) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2 M_n}{\hbar^2 E} \right)^{1/2} \theta(E - E_n^0), \quad (2.21в)$$

$$g_0(E) = 2 \delta(E - E_n^0), \quad (2.21г)$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция, принимающая значения единицы при положительных  $x$  и нуля — при отрицательных  $x$ . Отметим, что в квантовой яме плотность состояний имеет характер горизонтальной ступеньки, в квантовой проволоке зависимость  $g(E)$  аналогична плотности электронных состояний в объемном

полупроводнике, помещенном в квантующее магнитное поле, а в квантовой точке функция  $g(E)$  представляет собой набор изолированных пиков, уширенных с учетом конечности времени жизни электрона на уровнях размерного квантования.

### 2.3. Размерное квантование тяжелых и легких дырок

**Теория возмущений для вырожденной зоны.** Вначале приведем основные сведения о  $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -методе теории возмущений. Эффективный гамильтониан  $\mathcal{H}^{(l)}(\mathbf{K})$  для электрона в невырожденной зоне  $l$  в окрестности точки экстремума  $\mathbf{k}_0$  с точностью до членов второго порядка включительно представляется в виде

$$\mathcal{H}^{(l)}(\mathbf{K}) = E(\mathbf{K}) = E_{l\mathbf{k}_0} + \frac{\hbar^2 K^2}{2m_0} + \frac{\hbar}{m_0} \mathbf{K} \mathbf{p}_{ll} + \left( \frac{\hbar}{m_0} \right)^2 \sum'_{n_1=l_1j_1} \frac{(\mathbf{K} \mathbf{p}_{ln_1})(\mathbf{K} \mathbf{p}_{n_1l})}{E_{l\mathbf{k}_0} - E_{l_1\mathbf{k}_0}}, \quad (2.22)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ ;  $\mathbf{k}$  — волновой вектор электрона; индекс  $n_1$  включает зонный индекс  $l_1 \neq l$  и индекс  $j_1$ , нумерующий вырожденные состояния в зоне  $l_1$ ;  $\mathbf{p}_{n_1l}$  — междוזонный матричный элемент  $\langle n_1, \mathbf{k}_0 | \hat{\mathbf{p}} | l, \mathbf{k}_0 \rangle$ ;  $m_0$  — масса свободного электрона. Отсюда, в частности, получается выражение для тензора обратной эффективной массы

$$\frac{1}{m_{\alpha\beta}} = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0^2} \sum_{n_1} \frac{p_{ln_1}^\alpha p_{n_1l}^\beta + p_{ln_1}^\beta p_{n_1l}^\alpha}{E_{l\mathbf{k}_0} - E_{l_1\mathbf{k}_0}}. \quad (2.23)$$

При наличии  $N$ -кратного вырождения в точке  $\mathbf{k}$  эффективный гамильтониан имеет вид матрицы  $\mathcal{H}_{jj'}^{(l)}$  размерности  $N \times N$  ( $j, j' = 1, \dots, N$ ), компоненты которой находятся с использованием теории возмущений для вырожденного спектра:

$$\mathcal{H}_{jj'}^{(l)}(\mathbf{K}) = \left( E_{l\mathbf{k}_0} + \frac{\hbar^2 K^2}{2m_0} \right) \delta_{jj'} + \frac{\hbar}{m_0} \mathbf{K} \mathbf{p}_{lj, lj'} + \left( \frac{\hbar}{m_0} \right)^2 \sum'_{n_1=l_1j_1} \frac{(\mathbf{K} \mathbf{p}_{lj, n_1})(\mathbf{K} \mathbf{p}_{n_1, lj'})}{E_{l\mathbf{k}_0} - E_{l_1\mathbf{k}_0}}. \quad (2.24)$$

Волновая функция приближенно записывается в виде линейной комбинации произведений плавных огибающих  $C_j(\mathbf{r})$  на блоховские функции в точке  $\mathbf{k}_0$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N C_j(\mathbf{r}) |l, j, \mathbf{k}_0\rangle. \quad (2.25)$$

Коэффициенты  $C_j(\mathbf{r})$  удобно представить в виде  $N$ -компонентного столбца. Для состояния электрона с заданным волновым вектором имеем

$$\hat{C}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{K}\mathbf{r}) \hat{C}_{\mathbf{K}}, \quad (2.26)$$

$$\hat{C}_{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} C_{\mathbf{K},1} \\ C_{\mathbf{K},2} \\ \vdots \\ C_{\mathbf{K},N} \end{pmatrix}.$$

**Спин-орбитальное расщепление валентной зоны.** Перейдем теперь непосредственно к полупроводникам с решеткой цинковой обманки и рассмотрим дисперсию носителей тока в валентной зоне в окрестности точки экстремума  $\mathbf{k}_0 = 0$ . Полученные результаты применимы (с некоторыми оговорками и дополнениями) и для элементарных полупроводников со структурой алмаза, а также для полупроводниковых соединений со структурой вюрцита. В пренебрежении спином и спин-орбитальным взаимодействием (нерелятивистское приближение)  $\Gamma$ -состояния на дне зоны проводимости и в потолке валентной зоны в полупроводнике типа GaAs характеризуются  $s$ - и  $p$ -симметрией. Соответствующие (орбитальные, или координатные) функции записываются в виде  $S(\mathbf{r}) \equiv S$  (представление  $\Gamma_1$  точечной группы  $T_d$ ) и  $X, Y, Z$  (представление  $\Gamma_{15}$ ). Они периодичны с периодом решетки цинковой обманки, например  $X(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = X(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — базисные векторы решетки Браве. Учет спина удваивает число состояний:  $\uparrow S$  и  $\downarrow S$  — в зоне проводимости,  $\uparrow X, \uparrow Y, \uparrow Z, \downarrow X, \downarrow Y, \downarrow Z$  — в валентной зоне.

Спин-орбитальное взаимодействие приводит к расщеплению 6 валентных состояний в  $\Gamma$ -точке на четверку и пару; соответствующие волновые функции преобразуются по неприводимым спинорным представлениям  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$ . В дальнейшем мы используем базисы  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$  в виде:

$$\left. \begin{aligned} |\Gamma_8, +3/2\rangle &= -\uparrow \frac{X+iY}{\sqrt{2}}, \\ |\Gamma_8, +1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \uparrow Z - \downarrow \frac{X+iY}{\sqrt{6}}, \\ |\Gamma_8, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \downarrow Z + \uparrow \frac{X-iY}{\sqrt{6}}, \\ |\Gamma_8, -3/2\rangle &= \downarrow \frac{X-iY}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

$$\left. \begin{aligned} |\Gamma_7, +1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\uparrow Z + \downarrow (X+iY)], \\ |\Gamma_7, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [-\downarrow Z + \uparrow (X-iY)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

В качестве индекса, различающего состояния  $\Gamma_8$  или  $\Gamma_7$ , используются значения проекции эффективного углового момента дырки на ось  $z$ . Проводя аналогию со спин-орбитальным расщеплением  $p$ -состояний атома, состояниям  $\Gamma_8$  можно приписать полный угловой момент  $J = 3/2$  с проекциями  $\pm 3/2, \pm 1/2$ , а состояниям  $\Gamma_7$  — момент  $J = 1/2$  с проекциями  $\pm 1/2$ .

**Гамильтониан Латтинжера.** Для дырок в зоне  $\Gamma_8$  эффективный гамильтониан (2.24) в базисе (2.27) имеет вид:

$$\mathcal{H}^{(\Gamma_8)} = \begin{bmatrix} F & H & I & 0 \\ H^* & G & 0 & I \\ I^* & 0 & G & -H \\ 0 & I^* & -H^* & F \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

где

$$F = -\left[ (A-B)k_z^2 + \left( A + \frac{B}{2} \right) k_{\perp}^2 \right],$$

$$G = -\left[ (A+B)k_z^2 + \left( A - \frac{B}{2} \right) k_{\perp}^2 \right],$$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ B(k_x^2 - k_y^2) - 2i \frac{D}{\sqrt{3}} k_x k_y \right], \quad H = Dk_z (k_x - ik_y), \quad (2.30)$$

и характеризуется тремя параметрами —  $A$ ,  $B$  и  $D$ . Матрица (2.29) называется гамильтонианом Латтинжера. Линейными по  $k$  членами в гамильтониане (2.29) пренебрегают: в центросимметричных кристаллах с решеткой алмаза они отсутствуют, в кристаллах с решеткой цинковой обманки симметрия допускает их (если учесть спин-орбитальное смешивание валентной зоны  $\Gamma_{15}$  с далекими зонами), но, как правило, роль таких членов невелика. Дисперсионное уравнение приводится к виду

$$\text{Det} \left\| \mathcal{H}_{jj'}^{(\Gamma_8)} - E \delta_{jj'} \right\| = [(E - F)(E - G) - |H|^2 - |I|^2]^2 = 0$$

и имеет кратные корни

$$\begin{aligned} E_{hh, lh} &= \frac{F + G}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{F - G}{2}\right)^2 + |H|^2 + |I|^2} = \\ &= Ak^2 \pm \sqrt{B^2 k^4 + (D^2 - 3B^2)(k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Знаки плюс и минус отвечают ветвям легких и тяжелых дырок, каждая из которых при отсутствии нечетных по  $k$  членов в эффективном гамильтониане двукратно вырождена. Для большинства полупроводников со структурой цинковой обманки зонные параметры  $A$ ,  $B$ ,  $D$  в электронном представлении отрицательны, а ветви тяжелых и легких дырок ниспадающие. В дырочном представлении, используемом в (2.29), они имеют положительную кривизну. Для полноты приведем коэффициенты  $C_{k,j}$  разложения (2.25) в базисе (2.27):

$$\hat{C}_{kj1} = \frac{1}{\sqrt{(E_j - F)(E_j - E_{\bar{j}})}} \begin{bmatrix} H \\ E_j - F \\ 0 \\ I^* \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\hat{C}_{kj2} = \frac{1}{\sqrt{(E_j - F)(E_j - E_{\bar{j}})}} \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ -(E_j - F) \\ H^* \end{bmatrix},$$

где  $\bar{j} = lh$ , если  $j = hh$ , и  $\bar{j} = hh$ , если  $j = lh$ .

В гетероструктурах типа  $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ , выращенных в направлении  $[001]$ , состояния тяжелых (*heavy-hole*,  $hh$ ) и легких

(light-hole, *lh*) дырок при  $k_x = k_y = 0$  квантуются независимо, поэтому в квантовых ямах формируются две серии дырочных состояний:  $hhv$  и  $lhv$ , характеризуемые проекциями углового момента  $J_z = \pm 3/2$  и  $\pm 1/2$  соответственно.

## 2.4. Квантово-размерные электронные состояния в модели Кейна

Рассмотрим, каким образом при расчете размерно-квантованных электронных состояний можно учитывать непараболичность энергетического спектра и межзонное смешивание электронных состояний при значениях волнового вектора  $\mathbf{k}$ , отличных от точки экстремума. С этой целью рассмотрим модель Кейна, в которой точно учитывается  $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -смешивание состояний в зоне проводимости  $\Gamma_6$  и в валентных зонах  $\Gamma_8$ ,  $\Gamma_7$ , но пренебрегается влиянием далеких зон. Разложим волновую функцию электрона по блоховским функциям  $c_s R_j(\mathbf{r})$ , где  $c_s$  ( $s = \pm 1/2$ ) — спиновые столбцы  $\uparrow$  и  $\downarrow$ ;  $R_j$  — координатные функции  $S, X, Y, Z$ . Восемь огибающих удобно представить в виде спинора  $u(\mathbf{r})$  с компонентами  $u_{1/2}, u_{-1/2}$  при блоховских функциях  $S\uparrow, S\downarrow$  и векторного спинора  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , где  $v_x$  — спинор с компонентами  $v_{x,1/2}, v_{x,-1/2}$  при блоховских функциях  $X\uparrow, X\downarrow$ , и т. д.

Уравнение Шредингера с  $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -гамильтонианом  $H(\hat{\mathbf{k}})$  в виде матрицы  $8 \times 8$  можно привести к виду

$$Eu = -iP\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.33)$$

$$\left(E + E_g + \frac{\Delta}{3}\right)\mathbf{v} = iP\hat{\mathbf{k}}u + i\frac{\Delta}{3}(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{v}),$$

где  $E$  — энергия электрона, отсчитанная от дна зоны проводимости  $\Gamma_6$ ;  $E_g$  — ширина запрещенной зоны;  $\Delta$  — спин-орбитальное расщепление валентной зоны;  $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ ;  $P = i(\hbar/m_0)\langle S|\hat{p}_z|Z\rangle$ . Эту систему уравнений для  $u$  и  $\mathbf{v}$  удастся свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{\hbar^2 \hat{\mathbf{k}}^2}{2m_c(E)}u = Eu \quad (2.34)$$

для спинора  $u$ , при этом векторный спинор  $\mathbf{v}$  связан с градиентом  $\nabla u$  соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{1}{P} \frac{\hbar^2}{2m_c(E)} \nabla u - i \frac{1}{P} \frac{\hbar^2}{4m_0} [g(E) - g_0](\boldsymbol{\sigma} \times \nabla)u. \quad (2.35)$$

Здесь  $m_0$  и  $g_0$  — масса и фактор Ланде свободного электрона ( $g_0 \approx 2$ );

$$\frac{1}{m_c(E)} = \frac{2}{3} \frac{P^2}{\hbar^2} \left( \frac{2}{E_g + E} + \frac{1}{E_g + E + \Delta} \right); \quad (2.36)$$

$$g(E) = g_0 - \frac{4}{3} \frac{m_0 P^2}{\hbar^2} \frac{\Delta}{(E_g + E)(E_g + E + \Delta)}.$$

Заметим, что  $m_c^{-1}(0)$  и разность  $g(0) - g_0$  представляют собой вклад валентной зоны в обратную эффективную массу и  $g$ -фактор электрона на дне зоны проводимости, рассчитываемые во втором порядке **к**р теории возмущений. Этим и обусловлено введение величин  $m_c(E)^{-1}$  и  $g(E)$  в уравнения (2.34), (2.35). При расчете электронных состояний в гетероструктурах внутри каждой однородной области находится общее решение уравнения (2.34), затем эти решения сшиваются на граничных поверхностях с помощью граничных условий. В модели Кейна граничные условия задаются требованием непрерывности спинора  $u(\mathbf{r})$  и составляющей вектора  $Pv(\mathbf{r})$ , перпендикулярной к гетерогранице.

В отсутствие внешнего возмущения, нарушающего симметрию к инверсии времени, спинорную функцию  $u(\mathbf{r})$  можно представить в виде

$$u(\mathbf{r}) = [f(\mathbf{r}) + i\sigma_\alpha h_\alpha(\mathbf{r})]c_s, \quad c_s = \uparrow \text{ или } \downarrow, \quad (2.37)$$

где  $f(\mathbf{r})$ ,  $h_\alpha(\mathbf{r})$  — вещественные функции. Симметрия квантовой точки или проволоки налагает ограничения на вид этих функций. В частности, в квантовой точке симметрии  $D_{2d}$  (симметрия прямоугольного параллелепипеда или эллипсоида) для основного электронного уровня  $e1$  имеем:

$$f(\mathbf{r}) = f(x^2, y^2, z^2), \quad h_x(\mathbf{r}) = yzM_x(x^2, y^2, z^2),$$

$$h_y(\mathbf{r}) = zxM_y(x^2, y^2, z^2), \quad h_z(\mathbf{r}) = xyM_z(x^2, y^2, z^2),$$

где  $M_\alpha$  — произвольные функции  $x^2, y^2, z^2$ . Огибающая волновой функции электрона в состоянии с  $q=0$  в квантовой проволоке не зависит от  $z$ . Поэтому в квантовой проволоке с прямоугольным сечением

$$h_x(\mathbf{r}) \equiv h_y(\mathbf{r}) = 0, \quad h_z(\mathbf{r}) = xyM_z(x^2, y^2).$$



$$f(\mathbf{r}) = f(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

а три функции  $h_\alpha(\mathbf{r})$  тождественно равны нулю, так как из степеней координат  $x, y$  нельзя составить комбинаций, преобразующихся в группе  $D_{\infty h}$  как компоненты псевдовектора. По аналогичной причине в сферической квантовой точке также  $h_\alpha(\mathbf{r}) = 0$ .

Для основного состояния электрона в квантовой яме (при  $q_x = q_y = 0$ ), в цилиндрической квантовой проволоке (при  $q = 0$ ) и сферической квантовой точке огибающая  $f$  имеет вид (2.7), (2.19) и (2.17) соответственно. При этом в выражениях (2.18) для  $k$  и  $\infty$  нужно заменить значения эффективных масс на дне зоны проводимости в материалах  $A$  и  $B$  на зависящие от энергии массы  $m_A(E)$ ,  $m_B(E)$ , введенные в (2.36). Заметим, что масса  $m_B(E)$  определена для параметров материала  $B$  с учетом разрыва зон, т. е.  $m_B(E) = m_c(E - \Delta E_c)$ , где  $\Delta E_c$  — разрыв зоны проводимости.

Трансцендентные уравнения для энергии  $E$  и свободные коэффициенты находятся из граничных условий — непрерывности  $f$  и нормальной составляющей вектора  $m_c^{-1}(E)\nabla f$  — и из нормировки  $\int (u^\dagger u + v^\dagger v) dV_{3-d} = 1$ , где  $d = 2, 1, 0$  — размерность пространства;  $dV_n$  — элементарный объем в пространстве размерности  $n = 3 - d$ , т. е.  $dz$  при  $d = 2, n = 1$ ,  $dx dy$  при  $d = 1, n = 2$  и  $dx dy dz$  при  $d = 0, n = 3$ . Заметим, что в пренебрежении зависимостью  $m_c$  от  $E$  граничное условие для  $\nabla f$  эквивалентно второму граничному условию Бастарда (2.6).

## 2.5. Метод матриц переноса.

### Электроны, фононы и фотоны в сверхрешетке

Метод эффективной массы для электронов, приближение непрерывной среды для фононов и электродинамика сплошных сред допускают обобщенное описание распространения квазичастиц в полупроводниковой сверхрешетке. Рассмотрим неограниченную сверхрешетку, состоящую из чередующихся слоев  $A$  и  $B$  шириной  $a$  и  $b$  соответственно. Состояние квазичастицы описывается обобщенной огибающей  $\exp(-i\omega t)\phi(z)$ , где функция  $\phi(z)$  внутри слоев  $A$  задана в виде

$$\phi(z) = F_+ e^{ik_A z} + F_- e^{-ik_A z},$$

а внутри слоев  $B$  — в виде

$$\phi(z) = G_+ e^{ik_B z} + G_- e^{-ik_B z}.$$

Коэффициенты  $F_{\pm}, G_{\pm}$  могут зависеть от номера слоя. На гетерограницах функция  $\varphi(z)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\varphi|_A = \varphi|_B, \quad C_A \left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_A = C_B \left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_B. \quad (2.38)$$

Конкретный смысл функции  $\varphi(z)$  и коэффициентов  $C_{A,B}$ , а также связь между волновыми векторами  $k_A, k_B$  и частотой  $\omega$  будут обсуждаться для электронов, фотонов и фононов после вывода дисперсионного уравнения для обобщенной квазичастицы в сверхрешетке. С этой целью мы воспользуемся методом матрицы переноса. Представим функцию  $\varphi(z)$  и ее производную в виде двухкомпонентного столбца

$$\hat{\varphi}(z) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}, \quad \varphi' \equiv \frac{C_J}{C_A} \frac{1}{k_A} \frac{d\varphi}{dz} \quad (2.39)$$

Матрицей переноса через слой  $(z_0, z)$  называется матрица размерности  $2 \times 2$ , связывающая столбцы (2.39) в точках  $z$  и  $z_0$ :

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{t}(z, z_0) \hat{\varphi}(z_0).$$

При переносе через однородный слой, когда точки  $z, z_0$  лежат в пределах одного материала, матрица переноса имеет вид

$$\hat{t}(z, z_0) = \begin{bmatrix} \cos kl & \frac{1}{\bar{N}} \sin kl \\ -\bar{N} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

где  $l = z - z_0$ ;  $\bar{N} = 1$  в слое  $A$  и  $\bar{N} = (C_B k_B) / (C_A k_A) \equiv N$  в слое  $B$ . При выводе учтено, что производная  $d\varphi/dz$  равна

$$ik_A (F_+ e^{ik_A z} - F_- e^{-ik_A z}) \quad \text{или} \quad ik_B (G_+ e^{ik_B z} - G_- e^{-ik_B z}).$$

Заметим, что матрица переноса унимодулярна:  $\text{Det} \hat{t} = 1$ . При  $k_B = i\kappa$  и переносе в пределах слоя  $B$  имеем

$$\hat{t}(z, z_0) = \begin{bmatrix} \text{ch } \kappa l & \frac{1}{\eta} \text{sh } \kappa l \\ \eta \text{sh } \kappa l & \text{ch } \kappa l \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

где  $\eta = (C_B \kappa) / (C_A k_A)$ .

Согласно теореме Блоха, собственные решения можно искать в виде

$$\hat{\phi}(d) = \hat{t}_A \hat{t}_B \hat{\phi}(0) \equiv \hat{T} \hat{\phi}(0) = e^{iKd} \hat{\phi}(0),$$

где  $d = a + b$  — период;  $K$  — волновой вектор при распространении волны вдоль оси сверхрешетки  $z$ . Цель последующих выкладок — получить дисперсионное уравнение, связывающее  $K$  и  $\omega$ . В качестве первого шага запишем это уравнение в терминах матрицы  $\hat{T}$ :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} T_{11} - e^{iKd} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - e^{iKd} \end{bmatrix} = 0.$$

Учитывая унимодулярность матрицы  $\hat{T}$ , можем переписать это уравнение в форме:

$$\cos Kd = \frac{T_{11} + T_{22}}{2}. \quad (2.42)$$

Прямым перемножением матриц получаем

$$\begin{aligned} \hat{T} = \hat{t}_A \hat{t}_B &= \begin{bmatrix} \cos k_A a & \sin k_A a \\ -\sin k_A a & \cos k_A a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_B b & \frac{1}{N} \sin k_B b \\ -N \sin k_B b & \cos k_B b \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos k_A a \cos k_B b - N \sin k_A a \sin k_B b & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \cos k_A a \cos k_B b - \frac{1}{N} \sin k_A a \sin k_B b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для краткости записи недиагональные компоненты, которые не входят в уравнение (2.42), заменены многоточием. Подставляя в (2.42) выражения для  $T_{11}$  и  $T_{22}$ , получаем окончательно:

$$\cos Kd = \cos k_A a \cos k_B b - \frac{1}{2} \left( N + \frac{1}{N} \right) \sin k_A a \sin k_B b. \quad (2.43)$$

Теперь можно переходить к конкретным случаям.

### 2.5.1. Электроны

В этом случае  $\phi$  — огибающая волновой функции электрона (или дырки),  $\omega = E/\hbar$  и при использовании граничных условий (2.6) роль коэффициентов в (2.38) играют обратные эффективные массы:

$$C_A = \frac{1}{m_A}, \quad C_B = \frac{1}{m_B}, \quad N = \frac{m_A}{m_B} \frac{k_B}{k_A}.$$

Для состояний с энергией  $E$  ниже барьера  $V$  удобнее заменить  $k_A, k_B$  на  $k, i\kappa$  (см. (2.11)) и переписать дисперсионное уравнение в виде:

$$\cos Kd = \cos ka \cosh \kappa b + \frac{1}{2} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) \sin ka \sinh \kappa b, \quad (2.44)$$

где величина  $\eta$  введена в (2.9). В схеме приведенных зон значения  $K$  лежат в пределах от  $-\pi/d$  до  $\pi/d$ . Энергетический спектр  $E(\mathbf{q}, K)$  при фиксированном значении  $\mathbf{q}$ , например при  $\mathbf{q} = 0$ , состоит из чередующихся разрешенных и запрещенных минизон. При широких потенциальных барьерах нижние разрешенные минизоны с  $E < V$  узкие и лежат вблизи уровней размерного квантования электронных состояний в квантовых ямах той же толщины  $a$ . По мере уменьшения толщины барьеров  $b$  разрешенные минизоны уширяются, а запрещенные минизоны сужаются. В пределе  $b \rightarrow 0$  минизонный характер энергетического спектра переходит в параболический закон дисперсии электрона в зоне проводимости объемного полупроводника  $A$ .

Для анализа дисперсии при малых значениях  $K$  воспользуемся представлением

$$1 - \cos Kd = \frac{1}{2} \sin ka \sinh \kappa b f_1 f_2 \equiv F, \quad (2.45)$$

$$f_1 = \operatorname{tg} k \frac{a}{2} - \eta \operatorname{th} \kappa \frac{b}{2}, \quad f_2 = \frac{1}{\eta} \operatorname{ctg} k \frac{a}{2} + \operatorname{cth} \kappa \frac{b}{2}.$$

Уравнение  $f_1 = 0$  или  $f_2 = 0$  при  $b \rightarrow \infty$  совпадает с уравнением (2.9) или (2.10) для энергии электрона в одиночной квантовой яме. При  $K \ll \pi/d$  имеем

$$E \approx E_{ev} + \frac{d^2}{2F'} K^2,$$

где  $v$  — индекс разрешенной минизоны;  $E_{ev}$  — энергия при  $K = 0$ ;  $F'$  — производная  $dF(E)/dE$  при  $E = E_{ev}$ . Эффективная масса при движении электрона вдоль оси  $z$  сверхрешетки связана с  $F$  соотношением  $M_{zz} = F' \hbar^2 / d^2$ . При достаточно широких барьерах, таких что  $\exp \kappa b \gg 1$ , разрешенные минизоны очень узкие и зависимость  $E$  от  $K$  приближенно можно описывать формулой  $E(K) \approx E_{ev} + (1/F')(1 - \cos Kd)$ . Что касается зависимости  $E$  от

$q$ , то при  $m_A = m_B$  она параболическая, как в объемных композиционных материалах, а при  $m_A \neq m_B$  — имеет квазипараболический характер с эффективной массой, зависящей от  $K$  и  $q$  и медленно меняющейся в пределах от  $m_A$  до  $m_B$ .

## 2.5.2. Нормальные световые волны в оптических сверхрешетках

Выпишем систему макроскопических уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  — соответственно векторы напряженности электрического поля, электрической и магнитной индукции. Рассматривается изотропная немагнитная среда, в которой напряженность и индукцию магнитного поля можно считать совпадающими, а свойства среды описываются диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega)$ , связывающей векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  ( $\omega$  — частота света). Пространственной дисперсией, т. е. зависимостью  $\epsilon$  от волнового вектора световой волны, пренебрегаем. Для монохроматической волны оператор  $\partial/\partial t$  можно заменить на  $-i\omega$ . Оптической сверхрешеткой назовем периодическую структуру, состоящую из чередующихся слоев  $A$  (толщина  $a$ ) и  $B$  (толщина  $b$ ), характеризующихся диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_A(\omega)$  и  $\epsilon_B(\omega)$ . Как правило, мы будем опускать аргумент и писать кратко  $\epsilon_A$  и  $\epsilon_B$ . Решения в пределах слоя  $A$  или  $B$  представляют собой линейную комбинацию плоских волн  $\exp[i(q_x x + q_y y \pm k_{A,B} z)]$ , где

$$k_A = [(\omega/c)^2 \epsilon_A - q^2]^{1/2}, \quad k_B = [(\omega/c)^2 \epsilon_B - q^2]^{1/2}.$$

Без ограничения общности положим  $q_y = 0$ , так что волновые векторы  $(q_x, 0, \pm k_{A,B})$  лежат в плоскости, перпендикулярной оси  $y$ . Рассматриваемая система допускает три класса решений: волны  $s$ -поляризации,  $p$ -поляризации и интерфейсные.

Для волн  $s$ -поляризации электрический вектор  $\mathbf{E} = (0, \mathcal{E}_y, 0)$  ориентирован вдоль оси  $y$ , т. е. магнитный вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен этой оси и лежит в плоскости  $(x, z)$ . Роль  $\phi(z)$  играет электрическое поле  $\mathcal{E}_y$ . Из непрерывности тангенциальных составляющих  $\mathcal{E}_y$  и  $B_x$  и из соотношения  $B_x \propto \partial \mathcal{E}_y / \partial z$  следует, что  $\mathcal{E}_y|_A = \mathcal{E}_y|_B$  и  $(\partial \mathcal{E}_y / \partial z)|_A = (\partial \mathcal{E}_y / \partial z)|_B$ . Следовательно, в данном частном случае  $C_A = C_B$  и  $N = k_B / k_A$ .

Для волн  $p$ -поляризации  $\mathbf{E} = (\mathcal{E}_x, 0, \mathcal{E}_z) \perp y$ ,  $\mathbf{B} \parallel y$ . Роль  $\phi$  играет  $B_y$ ; первое граничное условие имеет вид  $B_y|_A = B_y|_B$ ; из непрерывности  $\mathcal{E}_x \propto \epsilon^{-1} (\partial B_y / \partial z)$  следует второе граничное условие

$$\epsilon_A^{-1} (\partial B_y / \partial z)|_A = \epsilon_B^{-1} (\partial B_y / \partial z)|_B,$$

т. е.  $C_A = \epsilon_A^{-1}$ ,  $C_B = \epsilon_B^{-1}$  и  $N = (k_B \epsilon_A) / (k_A \epsilon_B)$ .

В длинноволновом приближении свехрешетку можно рассматривать как однородную среду с эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\epsilon_A a + \epsilon_B b}{a + b}, \quad \epsilon_{zz} = \left( \frac{a}{\epsilon_A} + \frac{b}{\epsilon_B} \right)^{-1} (a + b). \quad (2.46)$$

Эти формулы можно вывести, разлагая тригонометрические функции (2.43) в ряд Тейлора по степеням  $k_A a$ ,  $k_B b$ ,  $Kd$ . Однако имеется и более прямой способ, основанный на том, что в тонких слоях можно пренебречь изменением поля  $\mathbf{E}$  и индукции  $\mathbf{D}$  внутри отдельного слоя. Для  $s$ -поляризованной волны поле  $\mathcal{E}_y$  непрерывно на границе, поэтому можно не учитывать изменение этого поля в пределах двух соседних слоев. Внутри каждого слоя индукцию  $D_y$  можно считать постоянной, но ее значения в слоях  $A$  и  $B$  различны:  $D_{A,y} = \epsilon_A \mathcal{E}_y$ ,  $D_{B,y} = \epsilon_B \mathcal{E}_y$ . Найдем среднюю по периоду электрическую индукцию

$$\overline{D}_y = \frac{a D_{A,y} + b D_{B,y}}{a + b} = \frac{a \epsilon_A + b \epsilon_B}{a + b} \mathcal{E}_y,$$

откуда и следует выражение (2.46) для  $\epsilon_{yy}$ . Для  $p$ -поляризованной волны воспользуемся непрерывностью компоненты  $D_z$ . Изменением  $D_z$  в пределах двух соседних слоев можно пренебречь, а для электрического поля имеем  $\mathcal{E}_{A,z} = D_z / \epsilon_A$ ,  $\mathcal{E}_{B,z} = D_z / \epsilon_B$ . Вычисляем среднее (или макроскопическое) поле

$$\overline{\mathcal{E}}_z = \frac{a \mathcal{E}_{A,z} + b \mathcal{E}_{B,z}}{a + b} = \frac{a \epsilon_A^{-1} + b \epsilon_B^{-1}}{a + b} D_z,$$

откуда следует выражение для  $\epsilon_{zz}$ .

Для рассмотренных двух классов решений электрическое и магнитное поля являются соленоидальными (или вихревыми), т. е. такими, которые можно записать как ротор некоторого другого вектора. Для третьего класса решений, интерфейсных (межграничных) волн, электрическое поле является по-

тенциальным, его можно записать в виде градиента  $-\nabla\varphi$ , а магнитное поле отсутствует. Как и прежде, считаем, что волновой вектор  $\mathbf{q}$  в плоскости интерфейсов направлен по оси  $x$ . Чтобы удовлетворить уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{D} = -\epsilon \Delta \varphi = 0$ , решения выбираются в виде  $\exp(iq_x x \pm q_x z)$ . При этом учитывается, что

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \exp(iq_x x \pm q_x z) = 0.$$

Для рассматриваемых решений роль  $\varphi$  играет скалярный потенциал и  $k_A = k_B = iq_x$ . Первое граничное условие — непрерывность  $\varphi$ , а второе условие следует из непрерывности нормальной составляющей электрической индукции  $D_z = \epsilon \mathcal{E}_z = -\epsilon \partial \varphi / \partial z$ . Отсюда следует, что  $C_A = \epsilon_A$ ,  $C_B = \epsilon_B$ ,  $N = \epsilon_B / \epsilon_A$  и для интерфейсных волн дисперсионное уравнение (2.43) принимает форму

$$\cos Kd = \operatorname{ch} q_x a \operatorname{ch} q_x b + \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} + \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \right) \operatorname{sh} q_x a \operatorname{sh} q_x b. \quad (2.47)$$

В предельном случае толстых барьеров  $q_x a, q_x b \rightarrow \infty$  оно переходит в

$$0 = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} + \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \right) = \frac{(\epsilon_A + \epsilon_B)^2}{2\epsilon_A \epsilon_B}$$

или

$$\epsilon_A(\omega) + \epsilon_B(\omega) = 0. \quad (2.48)$$

Полученное уравнение есть не что иное, как уравнение для поверхностной волны на границе двух сред. Оно имеет решение, если  $\epsilon$  зависит от частоты и существует область частот, в которой  $\epsilon_A$  и  $\epsilon_B$  принимают разные знаки. Получим уравнение (2.48) независимо, рассматривая волны на границе двух полубесконечных сред  $A/B$ . В этом случае решение выбирается в следующем виде:

при  $z < 0$  потенциал  $\varphi = \varphi_0 \exp(iq_x x + q_x z)$ ,  $\mathcal{E}_x = -iq_x \varphi$ ,  $D_z = -\epsilon_A q_x \varphi$  (считаем, что  $q_x > 0$ );

при  $z > 0$  потенциал  $\varphi = \varphi_0 \exp(iq_x x - q_x z)$ ,  $\mathcal{E}_x = -iq_x \varphi$ ,  $D_z = \epsilon_B q_x \varphi$ . Из непрерывности  $D_z$  получаем

$$-\epsilon_A q_x \varphi_0 = \epsilon_B q_x \varphi_0, \quad \text{т. е.} \quad \epsilon_A + \epsilon_B = 0,$$

что совпадает с (2.48).

В качестве примера рассмотрим поверхностный оптический фонон. Пусть частота  $\omega$  лежит в области резонансной частоты

оптического фонона для среды  $A$ ; частотная зависимость  $\epsilon_A$  имеет вид

$$\epsilon_A(\omega) = \epsilon_\infty \frac{\Omega_{LO}^2 - \omega^2}{\Omega_{TO}^2 - \omega^2},$$

где  $\epsilon_\infty$  — высокочастотная диэлектрическая проницаемость;  $\Omega_{TO}, \Omega_{LO}$  — частоты поперечного и продольного фононов, и пусть  $\epsilon_B$  не зависит от частоты и совпадает с  $\epsilon_\infty$ . Тогда частота поверхностной волны  $\Omega_s = \sqrt{(\Omega_{LO}^2 + \Omega_{TO}^2)/2}$ . При  $\Omega_{LO} - \Omega_{TO} \ll \ll \Omega_{TO}$  имеем  $\Omega_s \approx (\Omega_{LO} + \Omega_{TO})/2$ .

При  $q_x b \rightarrow \infty$ , но конечном  $q_x a$  получаем из (2.47) уравнение для частоты двух смешанных поверхностных волн:

$$0 = \operatorname{ch} q_x a + \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} + \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \right) \operatorname{sh} q_x a,$$

или  $e^{q_x a} (\epsilon_A + \epsilon_B)^2 = e^{-q_x a} (\epsilon_A - \epsilon_B)^2$  и  $\omega^2 = \Omega_s^2 \pm (1/2) \times \times (\Omega_{LO}^2 - \Omega_{TO}^2) e^{-q_x a}$ . При  $\Omega_{LO} - \Omega_{TO} \ll \Omega_{TO}$  имеем

$$\omega = \Omega_s \pm \frac{1}{2} (\Omega_{LO} - \Omega_{TO}) e^{-q_x a}.$$

Физически расщепление спектра в трехслойной структуре  $B/A/B$  означает взаимодействие поверхностных возбуждений, вследствие которого возбуждение, возникающее на одном из интерфейсов, распространяется на другой интерфейс. Отсюда ясно, что интерфейсная волна в сверхрешетке, в частности интерфейсный оптический фонон, представляет собой поверхностное возбуждение, передаваемое от одного интерфейса к другому и распространяющееся вдоль оси  $z$  неограниченно далеко (процессами рассеяния и распада оптического фонона пренебрегаем).

### 2.5.3. «Сложенные» акустические фононы (фононы с «ломаным» спектром)

Мы ограничимся рассмотрением продольных акустических (ЛА) фононов, распространяющихся вдоль оси  $z$ . Роль огибающей  $\phi$  играет смещение  $u_z$  точки тела вдоль оси  $z$ . Первое граничное условие — непрерывность  $u_z$ . Второе граничное условие следует из непрерывности компоненты  $\sigma_{zz}$  тензора напряжений, связанной с компонентой  $u_{zz} = \partial u_z / \partial z$  тензора деформаций со-



отношением  $\sigma_{zz} = \lambda u_{zz}$ . Здесь  $\lambda$  — модуль упругости  $\lambda_{zzzz}$ , который можно выразить через плотность среды  $\rho$  и продольную скорость звука  $s$ :  $\lambda = \rho s^2$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} k_A &= \omega/s_A, \quad k_B = \omega/s_B, \\ u_z|_A &= u_z|_B, \quad \lambda_A u_{zz}|_A = \lambda_B u_{zz}|_B, \\ C_A &= \lambda_A, \quad C_B = \lambda_B, \quad N = \frac{\lambda_B k_B}{\lambda_A k_A} = \frac{\rho_B s_B}{\rho_A s_A}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Дисперсионное уравнение удобно представить в виде

$$\cos Kd = \cos(k_A a + k_B b) - \frac{1}{2} \sin k_A a \sin k_B b \epsilon^2, \quad (2.50)$$

где

$$\epsilon = \frac{\rho_B s_B - \rho_A s_A}{\sqrt{\rho_A \rho_B s_A s_B}}.$$

В пренебрежении слагаемым, пропорциональным  $\epsilon^2$ , получаем

$$Kd = k_A a + k_B b = (\omega/S)d, \quad S = (as_A^{-1} + bs_B^{-1})^{-1}.$$

При учете этого слагаемого в спектре акустических фононов появляются разрешенные и запрещенные минизоны. При малых  $\epsilon$  ширина первой запрещенной минизоны  $\Delta\omega$  находится из условия

$$0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{S} d - 2\pi \right)^2 - \frac{1}{2} \sin k_A a \sin k_B b \epsilon^2$$

или

$$\Delta\omega = 2(S/d) |\epsilon \sin k_A a|.$$

Здесь учтено, что  $\sin k_B b \approx \sin(2\pi - k_A a) = -\sin k_A a$ .

На рис. 5 схематически представлена дисперсия акустических фононов в сверхрешетке. Пунктиром показан спектр при  $\epsilon = 0$ , он представляет собой прямую линию  $\Omega = SK$ , приведенную («сложенную») к первой зоне Бриллюэна сверхрешетки. Сплошными линиями показана дисперсионная кривая при отличном от нуля параметре согласования  $\epsilon$ . Для обозначения ветви дисперсионной кривой, или акустической минизоны, вво-

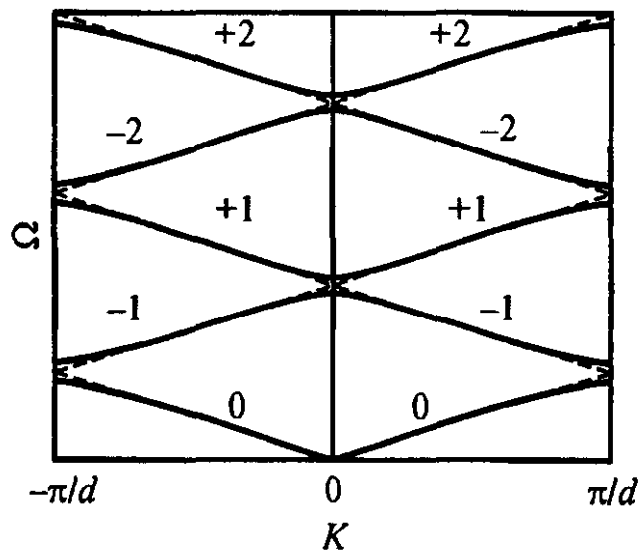


Рис 5 Схематическое изображение дисперсии «сложенных» акустических фононов в сверхрешетке

*Пунктирные линии* — кривая дисперсии в нулевом приближении по параметру  $\epsilon$ , *сплошные линии* — спектр фононов при  $\epsilon \neq 0$

дится индекс  $l$ , пробегающий значения  $0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Ветви, выходящей из точки  $\Omega = 0, K = 0$ , приписывается значение  $l = 0$ , двум следующим ветвям — значения  $l = \pm 1$  и т. д. При таких обозначениях пунктирная кривая на рис. 5 описывается формулой

$$\Omega_{lK} = S \left( |K| \operatorname{sign} l + \frac{2\pi}{d} |l| \right), \quad (2.51)$$

где  $\operatorname{sign} x$  — знак величины  $x$ .

## 2.6. Экситоны в квантовых ямах

Водородоподобные состояния экситона Ванье—Мотта описываются двухчастичной огибающей функцией  $\Psi_{\text{exc}}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h)$ . Напомним, что в объемном полупроводнике с простыми зонами эта функция для экситона  $1s$  имеет вид

$$\Psi_{\text{exc}}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \frac{e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}}{\sqrt{V}} \varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-r/a_B)}{\sqrt{\pi a_B^3}}, \quad (2.52)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$ ;  $\mathbf{r}_{e,h}$  — радиус-вектор электрона или дырки;  $\mathbf{R}$  — центр масс экситона  $(m_e \mathbf{r}_e + m_h \mathbf{r}_h)/(m_e + m_h)$ ,  $m_{e,h}$  — эффективная масса электрона или дырки;  $a_B$  — боровский радиус экситона  $\epsilon \hbar^2 / (\mu_{eh} e^2)$ ;  $\mu_{eh} = m_e m_h / (m_e + m_h)$  — приведенная эффективная масса электрона и дырки;  $\epsilon$  — низкочастотная диэлектрическая проницаемость. Энергия возбуждения  $1s$ -эксито-

на равна  $E = E_g - E_B + (\hbar^2 K^2 / 2M)$ , где  $E_g$  — ширина запрещенной зоны;  $E_B$  — боровская энергия связи (или экситонный ридберг), равная  $\mu_{eh} e^4 / (2\varepsilon^2 \hbar^2)$ ;  $M$  — трансляционная масса  $m_e + m_h$ .

**Широкие ямы** ( $a \gg a_B$ ). В этом случае экситон квантуется как единое целое; огибающая факторизуется

$$\Psi_{\text{exc}} = F(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r}), \quad F(\mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i\mathbf{K}_{\parallel}\mathbf{R}_{\parallel}} \Phi(Z), \quad (2.53)$$

а энергия возбуждения экситона определяется выражением

$$E = E_g - E_B + \frac{\hbar^2}{2M} \left[ K_{\parallel}^2 + \left( \frac{\pi v}{a} \right)^2 \right], \quad (2.54)$$

где  $\mathbf{R}_{\parallel}$  — положение центра масс в плоскости интерфейсов; размерное квантование экситона вдоль оси  $z$  описывается функцией  $\Phi(Z)$ ;  $a$  — ширина ямы. Для нижнего уровня размерного квантования экситона  $\Phi(Z) = \sqrt{2/a} \cos(\pi Z/a)$ .

**Узкие ямы** ( $a \leq a_B$ ). Для квазидвумерного экситона аналитическое решение отсутствует даже в полупроводнике с простой зонной структурой. В простейшем вариационном подходе волновая функция для основного ( $1s$ ) состояния экситона, привязанного к подзонам размерного квантования  $e\nu$  и  $h\nu'$ , записывается в виде

$$\Psi_{\text{exc}} = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i\mathbf{K}_{\parallel}\mathbf{R}_{\parallel}} \varphi(\rho, z_e, z_h), \quad (2.55)$$

$$\varphi(\rho, z_e, z_h) = f(\rho) \varphi_{e1}(z_e) \varphi_{h1}(z_h)$$

с пробной функцией

$$f(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{a}^2}} e^{-\rho/\tilde{a}}, \quad (2.56)$$

характеризуемой единственным вариационным параметром  $\tilde{a}$ . Здесь использованы обозначения:  $\rho = [(x_e - x_h)^2 + (y_e - y_h)^2]^{1/2}$ ;  $S$  — площадь образца;  $1/\sqrt{S}$  — нормировочный множитель; одночастичные функции  $\varphi_{e1}(z)$ ,  $\varphi_{h1}(z)$  определены аналогично (2.7), (2.14). Аналитическое решение имеется в точном двумерном случае, который отвечает предельному пере-

ходу  $V \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ , при этом  $Va^2$  ограничено снизу. В этом случае  $f(\rho)$  есть экспоненциальная функция с двумерным боровским радиусом  $\tilde{a} = a_B / 2$ , ридберг двумерного экситона в четыре раза превышает  $E_B$ , а энергия возбуждения экситона равна

$$E = E_g + E_{ev} + E_{hv} - 4E_B + \frac{\hbar^2 K_1^2}{2M},$$

где  $E_{ev}$ ,  $E_{hv}$  — энергии размерного квантования электрона и дырки. Энергия связи квазидвумерного экситона лежит в пределах между  $E_B$  и  $4E_B$ , а эффективный боровский радиус — между  $a_B / 2$  и  $a_B$ . Усложняя структуру пробной функции  $f(\rho)$  и увеличивая число вариационных параметров, можно рассчитывать и возбужденные состояния экситонной серии  $ev - hv'$ , в частности состояния  $ns$ . В отличие от  $1s$ -экситона возбужденные экситонные состояния характеризуются заметным диамагнитным сдвигом в магнитном поле, что позволяет довольно легко варьировать энергетическое расстояние, например между  $2s$ - и  $1s$ -резонансами.

### 3. ОПТИЧЕСКОЕ ПРОПУСКАНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР

Анализ спектров оптического пропускания и отражения играет первостепенную роль среди разнообразных методов исследования квантово-размерных структур.

В данной главе рассмотрена микроскопическая теория различных механизмов поглощения света в гетероструктурах с квантовыми ямами. Сначала в рамках одноэлектронной зонной теории описаны внутризонные и межзонные оптические переходы двумерных электронов. Поскольку энергетический спектр двумерных носителей заряда существенно отличается от спектра трехмерных, механизмы оптического поглощения в квантовых ямах качественно отличаются от аналогичных процессов в объемных полупроводниках. На рис. 6 показаны подзоны размерного квантования электронов зоны проводимости ( $c$ ) и валентной ( $v$ ) зоны в квантовой яме, а также возможные оптические переходы.

Двумерные электроны имеют больше каналов внутризонного поглощения, нежели трехмерные. В квантовых ямах возможны межподзонные (1) и внутриподзонные (2) оптические переходы, а также процессы «фотоионизации» квантовых ям (3), сопровождаемые переходами из размерно-квантованных дискретных состояний в надбарьерные состояния непрерывного спектра. Переходы между различными подзонами размерного квантования из  $v$ -зоны в  $c$ -зону (4, 5), вызываемые светом с  $\hbar\omega > E_g$ , могут порождать целое семейство полос межзонного поглощения.

В последующих разделах рассмотрены оптические явления, обусловленные экситонным вкладом в диэлектрический отклик квантовых ям. Проводятся теоретические расчеты и приводятся экспериментальные данные как для одиночной квантовой ямы, так и для структур с периодическим набором квантовых ям. Отдельный раздел посвящен квантовым микрорезонаторам, в которых может быть достигнуто значительное увеличение коэффициента экситон-фотонной связи.

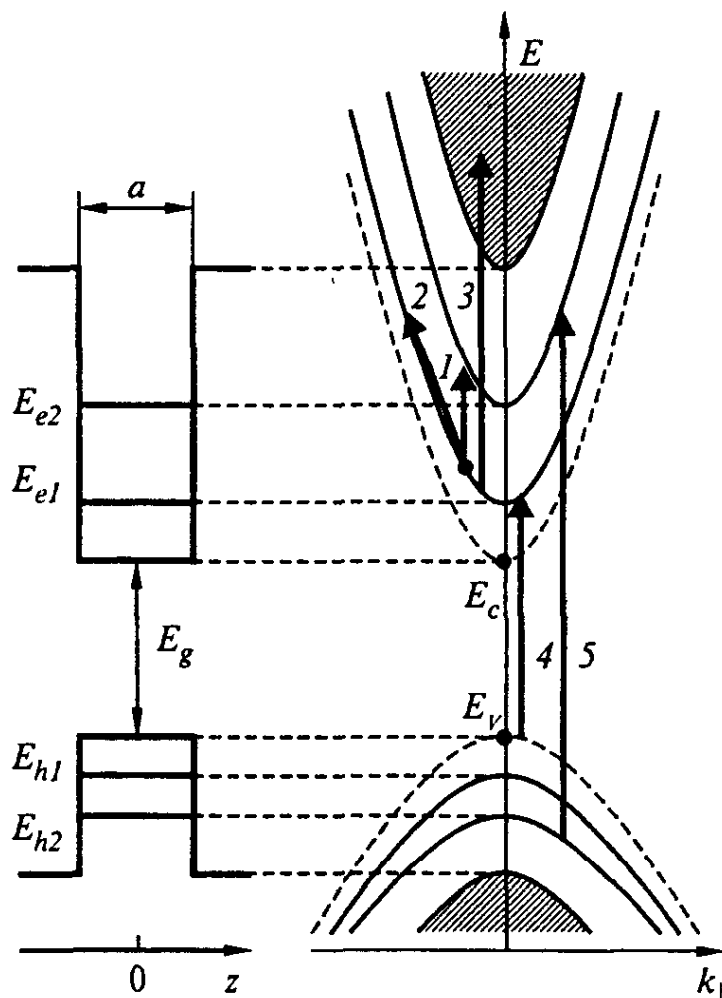


Рис. 6. Зонная диаграмма и дисперсионные кривые для квантовых ям в гетероструктурах типа I.

Валентная зона предполагается невырожденной, законы дисперсии в  $c$ -зоне и  $v$ -зоне — параболическими. Для каждой из зон показаны две подзоны размерного квантования, а также континуум надбарьерных состояний. Стрелками показаны внутризонные (1, 2, 3) и межзонные (4, 5) оптические переходы двумерных электронов.

### 3.1. Общие соотношения для коэффициента поглощения в одноэлектронном приближении

Эксперимент по изучению оптического поглощения состоит в измерении интенсивности излучения, прошедшего через образец. Если монохроматическая электромагнитная волна падает на однородный образец толщиной  $t$ , то, как известно, оптическое пропускание образца определяется следующей формулой (без учета интерференции):

$$T = \frac{I_t}{I_0} = \frac{(1 - R)^2 \exp(-\alpha t)}{1 - R^2 \exp(-2\alpha t)}, \quad (3.1)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего пучка;  $I_i$  — интенсивность прошедшего излучения;  $R$  — коэффициент отражения границы образец—воздух;  $\alpha$  — коэффициент поглощения. Выражение для коэффициентов поглощения света в случае объемных полупроводников имеет вид [5]:

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{ncm_0^2 \omega \Omega} \sum_{i,j} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{fi}|^2 [f(E_i) - f(E_f)] \delta(E_f - E_i - \hbar\omega), \quad (3.2)$$

где  $\hbar\omega$  — энергия фотона;  $n$  — показатель преломления;  $m_0$  — масса свободного электрона;  $\Omega$  — нормировочный объем образца, суммирование ведется по всем начальным ( $i$ ) и конечным ( $f$ ) состояниям;  $f(E)$  — функция распределения носителей заряда по энергии, в равновесном случае являющаяся функцией Ферми—Дирака:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}, \quad (3.3)$$

$\mathbf{e}$  — единичный вектор поляризации световой волны;  $\mathbf{p}_{fi}$  — матричный элемент оператора импульса:

$$p_{fi} = \langle f | \hat{\mathbf{p}} | i \rangle = \int_{\Omega} F_f^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} F_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.4)$$

$F_i(\mathbf{r})$ ,  $F_f(\mathbf{r})$  — волновые функции начального и конечного состояний.

Сверхрешетку с периодом  $d$ , малым по сравнению с длиной волны света в среде  $\lambda$ , можно рассматривать как оптически однородную эффективную среду с коэффициентом поглощения, определяемым формулой (3.2). Эта же формула применима и для короткопериодной структуры с квантовыми ямами, такой что  $d \ll \lambda$  и электронные состояния в соседних ямах не перекрываются. В этом случае в качестве  $F_i(\mathbf{r})$ ,  $F_f(\mathbf{r})$  в (3.2) можно взять нормированные на единицу волновые функции электрона в изолированной яме и понимать под объемом  $\Omega$  произведение  $Sd$ , где  $S$  — площадь образца в плоскости интерфейсов.

Для структуры с одиночной квантовой ямой понятие коэффициента поглощения, строго говоря, теряет смысл и вместо этого вводят относительную долю поглощаемой энергии  $A = 1 - |r|^2 - |t|^2$ , где  $r$  и  $t$  — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания через слой квантовой ямы (см. (3.135)). Условно коэффициент поглощения  $\alpha$  можно ввести и для оди-

ночной ямы, полагая  $A \equiv 1 - \exp(-\alpha_{SQW} a) \approx \alpha_{SQW} a$ , где  $a$  — ширина ямы. При этом, однако, нужно проявлять осторожность и не переоценивать смысл введенной величины  $\alpha$ . Для внутризонных оптических переходов это определение корректно, и коэффициент  $\alpha_{SQW}$  связан с коэффициентом поглощения в короткопериодной структуре с квантовыми ямами  $\alpha_{MQW}$  простым соотношением

$$\alpha_{SQW} = \frac{d}{a} \alpha_{MQW}. \quad (3.5)$$

В то же время для межзонных переходов с возбуждением экситона, у которого излучательное и безызлучательное времена жизни сопоставимы и величины  $|r|^2$  и  $A$  имеют один порядок, введение  $\alpha_{SQW}$  нецелесообразно (подробнее об экситонных оптических спектрах см. п. 3.5).

Вернемся к выражению для коэффициента поглощения (3.2) применительно для короткопериодной структуры с квантовыми ямами. Видно, что правила отбора, различающие разрешенные и запрещенные оптические переходы, определяются скалярным произведением вектора поляризации света и матричного элемента оператора импульса. Огибающая волновой функции электрона описывается выражением (2.1). Полная волновая функция начального состояния может быть записана в виде:

$$F_i(\mathbf{r}) = u_{n_i}(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} \exp(i \mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}) \phi_i(z),$$

где  $u_{n_i}(\mathbf{r})$  — периодическая блоховская волновая функция в центре зоны Бриллюэна (точка  $\Gamma$ ) для зоны  $n_i$  ( $n_i = c$  или  $v$ );  $\phi_i(z)$  — плавная огибающая волновой функции, описывающая движение электрона  $i$ -й подзоны вдоль оси  $z$ ;  $\mathbf{k}_{\parallel}$  и  $\mathbf{r}_{\parallel}$  — двумерные волновой вектор и радиус-вектор соответственно:

$$\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y), \quad \mathbf{r}_{\parallel} = (x, y). \quad (3.7)$$

Выражения, аналогичные (3.6) и (3.7), могут быть написаны и для конечного состояния путем замены  $i \rightarrow f$  и  $\mathbf{k}_{\parallel} \rightarrow \mathbf{k}'_{\parallel}$ . Получим теперь правила отбора:

$$P_{fi} = \int_{\Omega} F_f^*(\mathbf{r}) \hat{p} F_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\Omega} u_{n_f}^* \psi_f^* \hat{p} u_{n_i} \psi_i d\mathbf{r} =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} u_{n_f}^* \psi_f^* [\psi_i \hat{p} u_{n_i} + u_{n_i} \hat{p} \psi_i] d\mathbf{r} = \\
&= \int_{\Omega} \psi_f^* \psi_i u_{n_f}^* \hat{p} u_{n_i} d\mathbf{r} + \int_{\Omega} u_{n_f}^* u_{n_i} \psi_f^* \hat{p} \psi_i d\mathbf{r}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Введем объем элементарной ячейки кристалла  $\Omega_0$  и разобъем интегралы по объему в (3.8) на сумму интегралов по элементарным ячейкам, положение которых будем задавать векторами  $\mathbf{a}_l$ , где  $l$  — номер ячейки, пробегающий значения от 1 до  $N$ . В пределах одной элементарной ячейки плавные огибающие  $\psi_i(\mathbf{r})$  и  $\psi_f(\mathbf{r})$  меняются слабо и их можно вынести из-под знака интеграла. Используя периодичность быстро осциллирующих бловых сомножителей  $u(\mathbf{r})$ , получим:

$$\begin{aligned}
P_{fi} &= \sum_{l=1}^N (\psi_f^* \psi_i)_l \int_{\Omega_0} u_{n_f}^* (\mathbf{a}_l + \mathbf{r}) \hat{p} u_{n_i} (\mathbf{a}_l + \mathbf{r}) d\mathbf{r} + \\
&+ \sum_{l=1}^N (\psi_f^* \hat{p} \psi_i)_l \int_{\Omega_0} u_{n_f}^* (\mathbf{a}_l + \mathbf{r}) u_{n_i} (\mathbf{a}_l + \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\
&= \langle u_{n_f} | \hat{p} | u_{n_i} \rangle \int_{\Omega} \psi_f^* \psi_i d\mathbf{r} + \delta_{n_f, n_i} \int_{\Omega} \psi_f^* \hat{p} \psi_i d\mathbf{r}, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

где  $(\psi_f^* \psi_i)_l = \psi_f^*(\mathbf{a}_l) \psi_i(\mathbf{a}_l)$  и введен оптический матричный элемент

$$\langle u_{n_f} | \hat{p} | u_{n_i} \rangle = \frac{1}{\Omega_0} \int_{\Omega_0} u_{n_f}^*(\mathbf{r}) \hat{p} u_{n_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Выражение (3.9) позволяет сделать вывод о том, что разрешенные оптические переходы в квантовых ямах делятся на две группы, правила отбора в которых определяются различными условиями. Это так называемые внутризонные переходы, которые идут в пределах одной зоны — проводимости или валентной ( $n_i = n_f$ ), и межзонные переходы с  $n_i \neq n_f$ . Перейдем к подробному рассмотрению переходов этих двух типов.

### 3.2. Внутризонные оптические переходы в квантовых ямах

Напомним, что в объемном полупроводнике с идеально периодической кристаллической решеткой прямые внутризонные оптические переходы невозможны. Закон сохранения импульса для системы двух частиц (электрон и фотон) требует, чтобы волновые векторы электрона в начальном ( $\mathbf{k}$ ) и конечном ( $\mathbf{k}'$ ) состояниях были близки:  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q} \approx \mathbf{k}$ , так как волновой вектор света  $\mathbf{q}$  пренебрежимо мал по сравнению со средним значением волнового вектора электрона. При этом не может быть одновременно выполнен закон сохранения энергии

$$E_c(\mathbf{k}') = E_c(\mathbf{k}) + \hbar\omega, \quad (3.11)$$

так как дисперсия энергии трехмерного электрона в  $c$ -зоне описывается параболой  $E_c(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$ , а дисперсия энергии фотона — линейной зависимостью  $\hbar\omega = \hbar qc / n$ .

Поглощение фотона свободным электроном возможно только при обязательном участии какой-либо третьей частицы (квазичастицы), в качестве которой могут выступать различные несовершенства кристаллической решетки: фононы, примесные атомы, вакансии и т. д. Вклад импульса третьей частицы позволяет выполнить закон сохранения импульса. Такой оптический переход называют непрямым. Коэффициент поглощения при не прямых переходах значительно меньше, чем при прямых, так как, вообще говоря, вероятность одновременного взаимодействия трех частиц меньше, чем вероятность двухчастичного взаимодействия.

В квантовых ямах ситуация качественно иная. Здесь возможны не только не прямые, но и прямые оптические переходы электронов в пределах одной зоны. Например, в зоне проводимости поглощение фотонов может приводить к прямым переходам двумерных электронов из какой-либо одной подзоны размерного квантования в другую подзону либо в континуум состояний над ямой. Внутри одной подзоны размерного квантования двумерные электроны могут совершать лишь не прямые оптические переходы.

Перейдем к детальному рассмотрению указанных механизмов внутризонного поглощения света двумерными электронами.

#### 3.2.1. Межподзонные переходы электронов

Рассмотрим прямой оптический переход электрона из начального состояния  $i = |c, v, \mathbf{k}_{\parallel}\rangle$  в конечное состояние  $f = |c, v', \mathbf{k}'_{\parallel}\rangle$ , где квантовое число  $c$  указывает на то, что оба

состояния принадлежат зоне проводимости;  $v$  и  $v'$  — номера подзон размерного квантования;  $k_{\parallel}$  и  $k'_{\parallel}$  — двумерные волновые векторы электрона (они лежат в плоскости интерфейса, которую обозначим  $xy$ ).

Согласно (3.9), для внутризонных переходов дипольный матричный элемент равен\*

$$\begin{aligned} e \cdot p_{fi} &= e \int \psi_f^* \hat{p} \psi_i d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{S} \int \varphi_{v'}^* e^{-ik'_{\parallel} r_{\parallel}} [e_x \hat{p}_x + e_y \hat{p}_y + e_z \hat{p}_z] \varphi_v(z) e^{ik_{\parallel} r_{\parallel}} d\mathbf{r} \quad (3.12) \end{aligned}$$

и его можно представить в виде

$$\begin{aligned} e \cdot p_{fi} &= \hbar(e_x k_x + e_y k_y) \delta_{k'_{\parallel}, k_{\parallel}} \int dz \varphi_{v'}^*(z) \varphi_v(z) + \\ &+ e_z \delta_{k'_{\parallel}, k_{\parallel}} \int dz \varphi_{v'}^*(z) \hat{p}_z \varphi_v(z). \quad (3.13) \end{aligned}$$

Поскольку волновые функции разных подзон ортогональны:

$$\int dz \varphi_{v'}^*(z) \varphi_v(z) = \delta_{v', v}, \quad (3.14)$$

то для межподзонных переходов ( $v' \neq v$ ) первое слагаемое в (3.13) обращается в ноль. Тогда второе слагаемое определяет все закономерности межподзонного поглощения:

а) оно может наблюдаться лишь для света, вектор поляризации которого имеет отличную от нуля компоненту вдоль оси роста структуры ( $e_z \neq 0$ );

б) двумерные волновые векторы электрона в начальном и конечном состояниях должны совпадать ( $k'_{\parallel} = k_{\parallel}$ );

в) огибающие волновой функции электрона в начальном и конечном состояниях (в симметричной квантовой яме) должны иметь разную четность:

$$\langle \varphi_{v'} | \hat{p}_z | \varphi_v \rangle = \int dz \varphi_{v'}^*(z) \hat{p}_z \varphi_v(z) = -i\hbar \int dz \varphi_{v'}^*(z) \frac{d}{dz} \varphi_v(z) \neq 0. \quad (3.15)$$

---

\* Мы рассматриваем простейшую модель квантовых ям, для которой эффективные массы в яме и барьере совпадают:  $m_A = m_B = m$ .

Наиболее просто коэффициент межподзонного поглощения света рассчитывается для модели бесконечно глубоких ям. Используя явный вид волновых функций (см. п. 2.1):

$$\varphi_v = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \left( v \frac{\pi}{a} z \right) \text{ для нечетных } v; \quad (3.16)$$

$$\varphi_v = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left( v \frac{\pi}{a} z \right) \text{ для четных } v, \quad (3.17)$$

получаем для интеграла (3.15):

$$\langle \varphi_{v'} | \hat{p}_z | \varphi_v \rangle = i \frac{2\hbar}{a} \left[ 1 - (-1)^{v+v'} \right] \frac{vv'}{v'^2 - v^2}, \quad (3.18)$$

откуда действительно видно, что между состояниями одинаковой четности межподзонные переходы запрещены.

Часто интенсивность межподзонных оптических переходов характеризуют безразмерной величиной, называемой *силой осциллятора*:

$$f_{v'v} = \frac{2}{m(E_{ev'} - E_{ev})} \left| \langle \varphi_{v'} | \hat{p}_z | \varphi_v \rangle \right|^2. \quad (3.19)$$

В случае бесконечно глубокой ямы, в соответствии с (3.18) и (2.3), для переходов между состояниями разной четности сила осциллятора

$$f_{v'v} = \frac{64}{\pi^2} \frac{v^2 v'^2}{(v'^2 - v^2)^3}. \quad (3.20)$$

Сила осциллятора положительна для переходов, сопровождающихся поглощением света, и отрицательна для переходов, сопровождающихся эмиссией фотонов.

Для межподзонных переходов, как и для переходов между уровнями атома, справедливо так называемое правило сумм:

$$\sum_j f_{ji} = 1, \quad (3.21)$$

где  $i$  — произвольное начальное состояние, а суммирование ведется по всем конечным состояниям  $j$ .

Согласно (3.18) и (3.20), оптические переходы  $|v=1\rangle \rightarrow |v'=2\rangle$  обладают наибольшей вероятностью среди всех возможных переходов из основной подзоны. Для этих переходов

$$\left| \langle \varphi_2 | \hat{p}_z | \varphi_1 \rangle \right| = \frac{8\hbar}{3a}; \quad f_{21} = 0.96. \quad (3.22)$$

Для сравнения укажем, что  $f_{41} = 0.03$ , а  $f_{61}$  еще значительно меньше.

Рассчитаем коэффициент оптического поглощения для структуры с периодическим набором квантовых ям при переходах электронов из первой подзоны во вторую. Воспользуемся формулой (3.2). В качестве нормировочного объема возьмем  $\Omega = (a + b)S$ , где  $a$  и  $b$  — ширины ямы и барьера;  $S$  — площадь структуры. Будем использовать приближение эффективной массы, в связи с чем заменим в (3.2) массу свободного электрона  $m_0$  на эффективную массу  $m$ . Тогда с учетом (3.13) и (3.14) можно записать:

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{n_b c S (a + b) \omega m^2} \sum_{\mathbf{k}_i} \sum_{\mathbf{k}_f} |e_z \delta_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f} \langle \varphi_2 | \hat{p}_z | \varphi_1 \rangle|^2 \times \\ \times [f(E_i) - f(E_f)] \delta(E_f - E_i - \hbar\omega), \quad (3.23)$$

где  $E_i = E_{e1}^0 + \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m$ ;  $E_f = E_{e2}^0 + \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m$ ;  $n_b$  — показатель преломления в объемном материале (полагаем, что показатели преломления материалов ямы и барьера имеют близкие значения).

Подставив (3.22) в (3.23) и проведя суммирование по  $\mathbf{k}'$ , перейдем от суммирования по  $\mathbf{k}$  к интегрированию:

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{256\pi^2 e^2 \hbar^2 e_z^2}{9n_b c S a^2 (a + b) \omega m^2} \delta(E_{e2}^0 - E_{e1}^0 - \hbar\omega) \times \\ \times \int \frac{2S}{(2\pi)^2} d\mathbf{k}_{\parallel} [f(E_i) - f(E_f)]. \quad (3.24)$$

Поскольку фигурирующий в (3.24) интеграл равен  $(N_1 - N_2)S$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — двумерные концентрации электронов в 1-й и 2-й подзонах, то

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{256\pi^2 e^2 \hbar^2 (N_1 - N_2) e_z^2}{9n_b c a^2 (a + b) \omega m^2} \delta(E_{e2}^0 - E_{e1}^0 - \hbar\omega). \quad (3.25)$$

Полученная  $\delta$ -особенность спектральной зависимости  $\alpha$  при  $\hbar\omega = E_{e2}^0 - E_{e1}^0$  обусловлена тем, что законы дисперсии  $E(k_{\parallel})$  для двумерных электронов в 1-й и 2-й подзонах описываются идентичными параболами, так что при любых  $k_{\parallel}$  расстояние между ними по шкале энергий одинаково. Учет непараболичности законов дисперсии и других эффектов, устраняющих эквидистантность  $E_1(k_{\parallel})$  и  $E_2(k_{\parallel})$  при разных  $k_{\parallel}$ , приведет к уширению пика межподзонного поглощения. К этому же приводит и учет релаксационных процессов за счет уширения энергетических уровней. Поэтому при анализе экспериментальных кривых в формуле (3.25)  $\delta$ -функцию обычно заменяют на лоренцевский контур:

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{256\pi^2 e^2 \hbar^2 (N_1 - N_2) e_z^2}{9n_b c a^2 (a+b) \omega m^2} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(E_{e2}^0 - E_{e1}^0 - \hbar\omega)^2 + \Gamma^2}, \quad (3.26)$$

где параметр уширения  $\Gamma$  находят из эксперимента (он равен спектральной полуширине линии поглощения).

Более точная модель межподзонного поглощения может быть получена путем аналогичных расчетов для ямы конечной глубины  $V$  с учетом различия эффективных масс в яме и барьере. Соответствующие этой модели огибающие волновых функций были найдены в п. 2.1. Мы не будем приводить здесь результаты аналитического расчета дипольного матричного элемента (3.13): их можно найти в [2]. Оценки показывают, что относительная величина поправок к формуле (3.18) имеет порядок  $\hbar/a\sqrt{2mV}$ . Например, для квантовой ямы из GaAs шириной 100 Å и глубиной 300 мэВ величина поправок составляет примерно 15 %, так что для оценок формулы (3.18)—(3.26) вполне годятся. С другой стороны, следует иметь в виду, что при условии  $m_A \neq m_B$  изменяются правила отбора: становятся возможны также оптические переходы под воздействием  $e_x$ - и  $e_y$ -компонент поля световой волны. Такие переходы могут идти только между подзонами одинаковой четности ( $|1\rangle \rightarrow |3\rangle, |2\rangle \rightarrow |4\rangle$  и т. п.). Оценки показывают, что для квантовых ям GaAs/AlGaAs коэффициент поглощения света с поляризацией вдоль квантово-размерных слоев на несколько порядков ниже, чем для света с  $e_z$ -поляризацией.

Важно отметить, что при экспериментальных исследованиях межподзонного поглощения нельзя использовать простейшую геометрию опыта, когда волновой вектор света  $\mathbf{q}$  направлен вдоль оси роста структуры. В этой геометрии множитель  $e_z^2$ ,

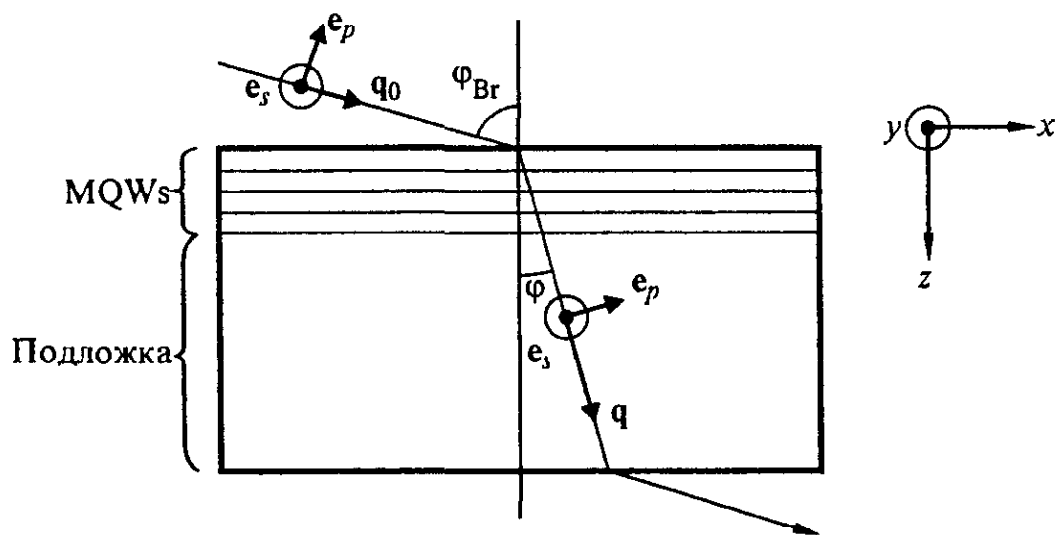


Рис 7 Исследование спектра оптического пропускания MQW-структур в конфигурации Брюстера

входящий в формулу (3.25), равен нулю и, следовательно, световая волна не может возбуждать межподзональные переходы.

На практике используют либо конфигурацию Брюстера (рис. 7), либо многопроходную геометрию (рис. 8). В обоих случаях световая волна распространяется под углом к оси роста структуры:  $\varphi = (\hat{q}, \hat{o}_z) \neq 0$ . При этом, как отмечалось выше (п. 2.5), нормальными волнами являются волны  $s$ - и  $p$ -поляризации (на рисунках соответствующие им единичные векторы поляризации обозначены  $e_s$  и  $e_p$ ). Только волна  $p$ -поляризации способна возбудить межподзональные оптические переходы, так как она имеет отличную от нуля проекцию вектора напряженности электрического поля на ось  $z$  ( $e_z = \sin \varphi$ ). Для волны  $s$ -поляризации  $e_z = 0$  при любом  $\varphi$ , и эта волна неактивна в отношении межподзональных переходов.

Конфигурация Брюстера удобна с той точки зрения, что для света  $p$ -поляризации отсутствуют потери на отражение на границе раздела образца с воздухом. Следовательно, оптиче-

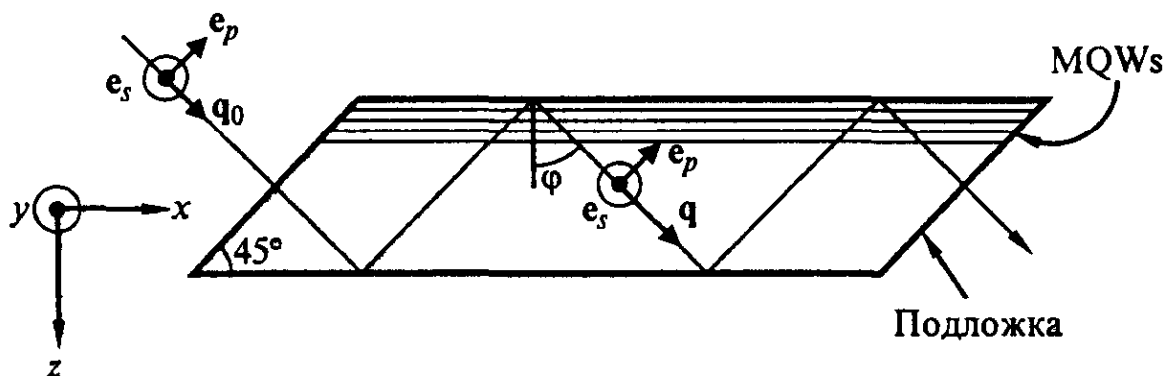


Рис 8 Многопроходная геометрия исследования спектров оптического пропускания гетероструктур с квантовыми ямами

ское пропускание MQW-структуры описывается простой формулой

$$T = \exp[-\alpha(\varphi)N(a+b)/\cos\varphi], \quad (3.27)$$

где  $N$  — число периодов;  $\cos\varphi$  учитывает увеличение длины взаимодействия световой волны с квантово-размерными слоями (по отношению к геометрии  $q \parallel z$ ). Недостаток этой конфигурации — низкая чувствительность измерений, так как при однократном проходе света через MQW-структуру свет ослабляется обычно лишь на несколько процентов (в пике межподзонного поглощения).

Многопроходная геометрия (*multipass geometry*) обеспечивает увеличение чувствительности измерений примерно на порядок. Многократное полное внутреннее отражение на границе раздела образца с воздухом обеспечивает увеличение длины хода световой волны через MQW-структуру. В этой геометрии опыта угол между волновым вектором света в MQW-структуре и ее оптической осью составляет  $45^\circ$ .

Заметим, что величина коэффициента поглощения  $\alpha$  в зависимости от угла между волновым вектором света и направлением роста MQW-структуры, согласно (3.26),  $\alpha(\omega) \propto \sin^2\varphi$ . Измерив  $\alpha$  при данном  $\varphi$ , можно легко определить более универсальный оптический параметр —  $\text{Im } \epsilon_{zz}$  с помощью соотношения

$$\text{Im } \epsilon_{zz} = \frac{\alpha(\omega)}{\sin^2\varphi} \frac{cn_b}{\omega}. \quad (3.28)$$

Вывод этого соотношения приводится ниже, в п. 3.2.2.

На рис. 9 представлен экспериментальный спектр межподзонного поглощения MQW-структуры, содержащий 100 периодов квантовых ям из GaAs ( $a = 70 \text{ \AA}$ ), разделенных широкими барьерами  $\text{Al}_{0.27}\text{Ga}_{0.73}\text{As}$  ( $b = 150 \text{ \AA}$ ). Концентрация двумерных электронов составляла  $N_1 = 1.4 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$ . Согласно расчету, в таких ямах (высота барьера 202 мэВ) имеется две подзоны размерного квантования:  $E_{e1}^0 = 47 \text{ мэВ}$  и  $E_{e2}^0 = 171 \text{ мэВ}$ . Экспериментально наблюдаемое значение пика межподзонного поглощения смещено на несколько миллиэлектронвольт вверх по шкале энергий относительно расчетного  $E_{e2}^0 - E_{e1}^0 = 124 \text{ мэВ}$ . Более точная модель межподзонных переходов включает эффекты деполяризации (см. ниже), непараболичности [7], обменного взаимодействия [8] и др. Наблюдаемое на эксперименте спектральное уширение соответствует  $\tau = \hbar/\Gamma = 18 \text{ пс}$ , что по порядку величины совпадает с внутризонным временем релаксации при комнатной температуре.



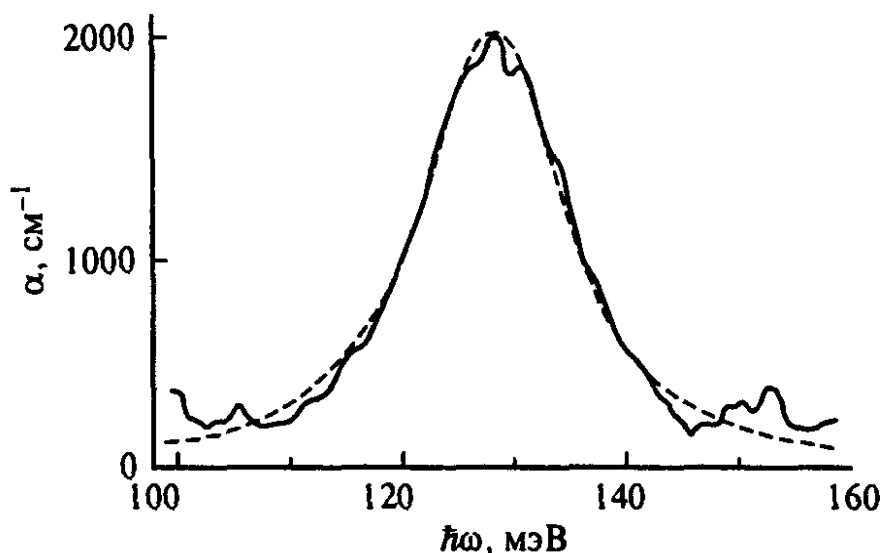


Рис. 9. Спектр межподзонного поглощения MQW-гетероструктуры [6].  
Сплошная линия — эксперимент, штриховая — аппроксимация лоренцианом

### 3.2.2. Анизотропия диэлектрической проницаемости и двойное лучепреломление

Структуры с периодическим набором квантовых ям с точки зрения оптических свойств подобны одноосному кристаллу. Помимо анизотропного оптического поглощения в них можно также наблюдать двойное лучепреломление.

В предыдущем разделе было показано, что межподзональные переходы электронов в квантовых ямах порождают интенсивное резонансное поглощение для световой волны  $p$ -поляризации, в то время как волна  $s$ -поляризации не вызывает поглощения. Различны и показатели преломления для этих волн:  $n_p \neq n_s$ . Если используется многопроходная геометрия (см. рис. 8) и падающая волна возбуждает в структуре одновременно обе нормальные волны, то на выходе из структуры  $p$ - и  $s$ -компоненты оказываются сдвинутыми по фазе относительно друг друга на угол

$$\Delta\delta = \frac{\omega}{c}(n_p - n_s) \frac{N(a+b)}{\cos\varphi} \cdot 2N_R, \quad (3.29)$$

где  $(a+b)$  — период структуры;  $N$  — общее число периодов;  $N_R$  — число отражений световой волны на границе раздела MQW-слоя с воздухом;  $\varphi$  — угол между волновым вектором света в MQW-структуре и направлением ее роста (обычно выбирают  $\varphi = 45^\circ$ ).

Сравнивая параметры эллипса поляризации световой волны на входе и на выходе из структуры, можно определить  $\Delta\delta$ , а зна-

чит, и  $n_p - n_s$  (см., например, [9]). Для удобства анализа падающую волну делают обычно линейно поляризованной, с азимутом вектора поляризации  $45^\circ$  по отношению к плоскости падения (при этом  $p$ - и  $s$ -компоненты падающей волны равны по амплитуде).

Тензор комплексной диэлектрической проницаемости для рассматриваемой одноосной среды можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_b & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_b & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_b + \Delta\epsilon + i \operatorname{Im} \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

где  $\epsilon_b = n_b^2$  — вещественная диэлектрическая проницаемость материала слоя квантовой ямы для случая объемного полупроводника, который является прозрачной изотропной средой с показателем преломления  $n_b$ . Компонента  $\epsilon_{zz}$  не совпадает с  $\epsilon_b$ . Во-первых, она содержит мнимую часть  $\operatorname{Im} \epsilon_{zz}$ , характеризующую поглощение света  $p$ -поляризации при межподзонных переходах электронов. Величина  $\operatorname{Im} \epsilon_{zz}$  была рассчитана ранее и описывается соотношениями (3.26) и (3.28). Во-вторых, вещественная часть этой компоненты имеет дополнительный вклад  $\Delta\epsilon$ , также обусловленный межподзонными переходами электронов. Согласно универсальному соотношению Крамерса—Кронига [10], этот вклад можно вычислить следующим образом:

$$\Delta\epsilon(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im} \epsilon_{zz}(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2} d\omega', \quad (3.31)$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения.

Используя уравнение Френеля [9], найдем показатели преломления ( $n_p$  и  $n_s$ ) и поглощения ( $k_p$  и  $k_s$ ) для нормальных волн в среде с диэлектрической проницаемостью вида (3.30).

Для волн  $s$ -поляризации получаем, что  $n_s = \sqrt{\epsilon_b} = n_b$  и  $k_s = 0$  независимо от угла  $\varphi$  между волновым вектором и оптической осью. Согласно терминологии, принятой в оптике анизотропных сред, эту волну называют *обыкновенной*. Для волны  $p$ -поляризации, которую называют *необыкновенной*,  $n$  и  $k$  зависят от угла  $\varphi$ :

$$\frac{1}{(n_p + ik_p)^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{\epsilon_b + \Delta\epsilon + i \operatorname{Im} \epsilon_{zz}} + \frac{\cos^2 \varphi}{\epsilon_b}. \quad (3.32)$$

Разделяя в (3.32) вещественную и мнимую части, при условиях слабой анизотропии  $n_p - n_b \ll n_b$  и слабого поглощения

$k_p \ll n_b$ , которые обычно справедливы для полупроводниковых MQW-структур, получаем:

$$n_p = n_b + \frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon}{n_b} \sin^2 \varphi; \quad (3.33)$$

$$k_p = \frac{1}{2} \frac{\text{Im} \epsilon_{zz}}{n_b} \sin^2 \varphi. \quad (3.34)$$

Поскольку коэффициент поглощения  $\alpha$  связан с показателем поглощения  $k$  равенством

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} k, \quad (3.35)$$

соотношение (3.34) эквивалентно соотношению (3.28).

Итак, если в эксперименте используется многопроходная геометрия (см. рис. 8) и  $\varphi = 45^\circ$ , то сдвиг фаз между  $p$ - и  $s$ -компонентами на выходе из структуры, согласно (3.29) и (3.33), пропорционален  $\Delta \epsilon$ :

$$\Delta \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\Delta \epsilon}{n_b} \frac{N(a+b)N_R}{\sqrt{2}}. \quad (3.36)$$

Следовательно, измерив в эксперименте спектральную зависимость сдвига фаз  $\Delta \delta$ , можно найти зависимость  $\text{Re} \epsilon_{zz}(\omega)$  для MQW-структуры.

С другой стороны, если в эксперименте удалось измерить спектр  $\alpha_p(\omega)$  во всей полосе межподзонного поглощения, сдвиг фаз  $\Delta \delta$  легко может быть рассчитан с помощью (3.36), (3.31) и (3.28):

$$\Delta \delta = \frac{4}{\pi \sqrt{2}} N(a+b)N_R \omega \int_0^\infty \frac{\alpha_p(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (3.37)$$

На рис. 10 представлены результаты экспериментального исследования межподзонного поглощения и сдвига фаз между волнами  $p$ - и  $s$ -поляризаций в одной и той же структуре с квантовыми ямами [11]. Измерения проводились с помощью пере-страиваемого  $\text{CO}_2$ -лазера для восьми дискретных длин волн. Длина оптического хода световой волны в структуре составляла  $[N(a+b)/\cos \varphi] \cdot 2N_R = 20$  мкм.

Кроме того, для этой же структуры с помощью фурье-спектрометра были проведены детальные исследования поглощения во всей спектральной полосе, соответствующей межподзонным

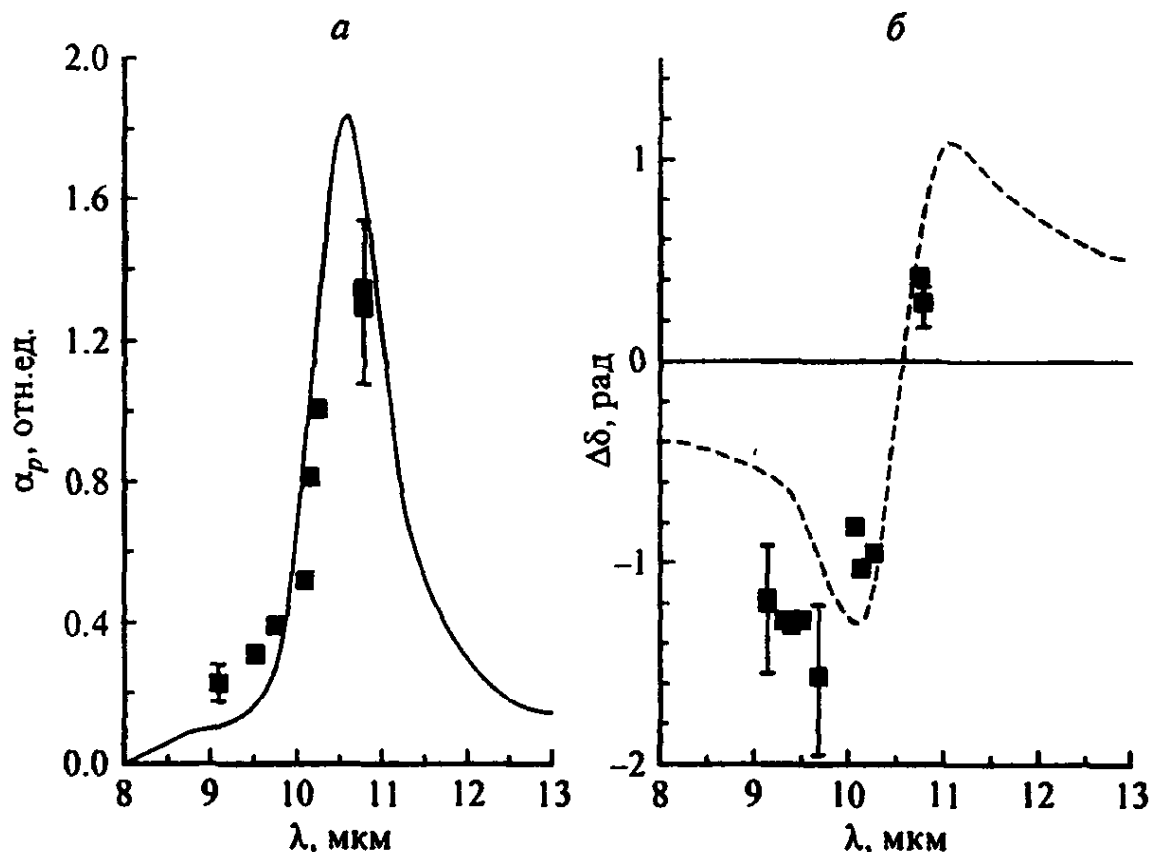


Рис. 10. Спектральные зависимости коэффициента поглощения  $\alpha_p$  для света  $p$ -поляризации (а) и сдвига фаз  $\Delta\delta$  между волнами  $p$ - и  $s$ -поляризаций (б) для структуры GaAs/Al<sub>0.4</sub>Ga<sub>0.6</sub>As с периодическим набором квантовых ям [11].

Точки — экспериментальные результаты, полученные с помощью перестраиваемого CO<sub>2</sub>-лазера; сплошная кривая (а) — спектр поглощения, измеренный с помощью фурье-спектрометра; штриховая линия (б) — расчет двулучепреломления с помощью соотношения Крамерса—Кронига.

переходам электронов ( $\lambda = 8 — 13.5 \mu\text{m}$ , см. сплошную линию на рис. 10, а), и путем интегрирования полученной зависимости  $\alpha_p(\omega)$  с помощью соотношения (3.37) была рассчитана спектральная зависимость сдвига фаз  $\Delta\delta$ . Результаты расчета показаны на рис. 10, б штриховой линией; они близки к экспериментальным данным, что демонстрирует удобство использования соотношений Крамерса—Кронига для расчетов.

Максимальный сдвиг фаз наблюдался на коротковолновом крыле линии межподзонного поглощения при  $\lambda = 9.8 \mu\text{m}$  и составлял  $\Delta\delta = 1.5$  рад, что соответствует величине двойного лучепреломления  $n_p - n_s \approx 0.1$ . Это весьма большой эффект, и его можно использовать для создания эффективного, малогабаритного и быстродействующего электрооптического модулятора. Как известно, поперечное электрическое поле сдвигает линию межподзонного поглощения (так называемый резонансный эффект Штарка), так что на фиксированной длине волны будет наблюдаться фазовая модуляция излучения, прошедшего через структуру.

### 3.2.3. Эффект деполяризации

Рассмотрим одиночную бесконечно глубокую квантовую яму шириной  $a$ , на нижнем уровне которой находятся электроны. Такая система — квантовая яма с широкими барьерами — представляет собой слоистую среду. Эффект деполяризации может сдвигать резонансную энергию относительно энергетического расстояния между уровнями квантования. Физика эффекта деполяризации заключается в том, что на электрон в квантовой яме действует высокочастотное электрическое поле электромагнитной волны, которое отличается от внешнего поля на величину поля, создаваемого другими электронами, поляризованными внешним полем [12].

Поглощение света на единицу площади определяется следующей величиной:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int dz j_z E_{z, \text{ext}}, \quad (3.38)$$

где  $j_z$  — индуцированная полем электромагнитной волны плотность высокочастотного тока;  $E_{z, \text{ext}}$  — внешнее поле электромагнитной волны; ось  $z$  — ось роста структуры. Индуцированный полем в квантовой яме ток, усредненный по ширине ямы, равен:

$$\bar{j}_z = \sigma_{zz} E_z, \quad (3.39)$$

где  $E_z$  — поле, действующее на электроны в квантовой яме;  $\sigma_{zz}$  — высокочастотная электропроводность на единицу площади:

$$\sigma_{zz} = \frac{N_1 e^2 f_{21}}{ma} \frac{-i\omega}{\omega_{21}^2 - \omega^2 - 2\omega i/\tau}. \quad (3.40)$$

Здесь для описания межподзонного резонанса используется модель осциллятора [12], в которой  $\omega_{21} = (E_{e2} - E_{e1})/\hbar$ ;  $\tau$  — феноменологическое время релаксации;  $N_1$  — поверхностная концентрация электронов в первой подзоне размерного квантования;  $f_{21}$  — сила осциллятора для переходов электронов между уровнями  $E_{e1}$  и  $E_{e2}$ , определяемая формулой (3.19).

Поле  $E_z$ , действующее на электроны в квантовой яме, можно найти из соотношения

$$\epsilon_{\infty} E_{z, \text{ext}} = \epsilon_{zz} E_z, \quad (3.41)$$

где  $\epsilon_{\infty}$  — диэлектрическая проницаемость полупроводниковых слоев, окружающих квантовую яму;  $\epsilon_{zz}$  — компонента тензора

высокочастотной диэлектрической проницаемости слоя, образующего квантовую яму:

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{\infty} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{zz}. \quad (3.42)$$

Теперь выражение для тока можно записать следующим образом:

$$j_z = \sigma_{zz} \frac{\epsilon_{\infty}}{\epsilon_{zz}} E_{z, \text{ext}} = \tilde{\sigma}_{zz} E_{z, \text{ext}}, \quad (3.43)$$

а поглощение света будет определяться величиной

$$\frac{1}{2} \text{Re} \tilde{\sigma}_{zz} E_{z, \text{ext}}^2, \quad (3.44)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\epsilon_{\infty}}{\epsilon_{zz}} \sigma_{zz}. \quad (3.45)$$

Подставляя в (3.45)  $\epsilon_{zz}$  согласно (3.42), получим:

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{N_1 e^2 f_{21}}{m a} \frac{-i\omega}{\tilde{\omega}_{21}^2 - \omega^2 - 2\omega i/\tau}, \quad (3.46)$$

где

$$\tilde{\omega}_{21}^2 = \omega_{21}^2 + \omega_p^2, \quad (3.47)$$

и межподзонаная плазменная частота

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N_1 e^2 f_{21}}{\epsilon_{\infty} m a}. \quad (3.48)$$

Напомним, что коэффициент поглощения связан с высокочастотной электропроводностью простым соотношением

$$\alpha = \frac{4\pi}{c n_b} \text{Re} \tilde{\sigma}_{zz}. \quad (3.49)$$

Таким образом, резонанс для электромагнитной волны, поляризованной вдоль оси роста (а только волна с такой поляризацией поглощается электронами в квантовой яме), смещается в коротковолновую область спектра.

Оценим  $\omega_p$  для квантовой ямы шириной  $a = 70 \text{ \AA}$  с концентрацией электронов  $N_1 = 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ . Пусть  $m = 0.065 m_0$ ,  $\epsilon_\infty = 12$ , тогда  $\hbar\omega_p \cong 25 \text{ мэВ}$ , а сдвиг резонанса происходит примерно на  $+7 \text{ мэВ}$ .

### 3.2.4. «Фотоионизация» квантовых ям

В квантовых ямах конечной глубины ( $0 < V < \infty$ ) наряду с дискретными подзонами  $E_{ev}$  существует континуум делокализованных состояний с энергиями выше края ямы. Свет с достаточно большой энергией квантов может вызывать переходы электронов из основной подзоны  $E_{e1} = E_{e1}^0 + (\hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m)$  в континуум. Такие переходы по аналогии с процессами в атомах будем называть «фотоионизацией» квантовых ям (в дальнейшем кавычки опускаем).

Найдем волновые функции состояний континуума. Энергии состояний будем отсчитывать от дна зоны проводимости барьера (рис. 11). По аналогии с (3.6) плавную огибающую волновой функции запишем в виде

$$\psi_{E_{\perp}, k_{\parallel}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} \exp(i k_{\parallel} \mathbf{r}) \varphi_{E_{\perp}}(z), \quad (3.50)$$

где экспонента описывает свободное движение в плоскости квантовой ямы, а функция  $\varphi_{E_{\perp}}(z)$  характеризует поперечное

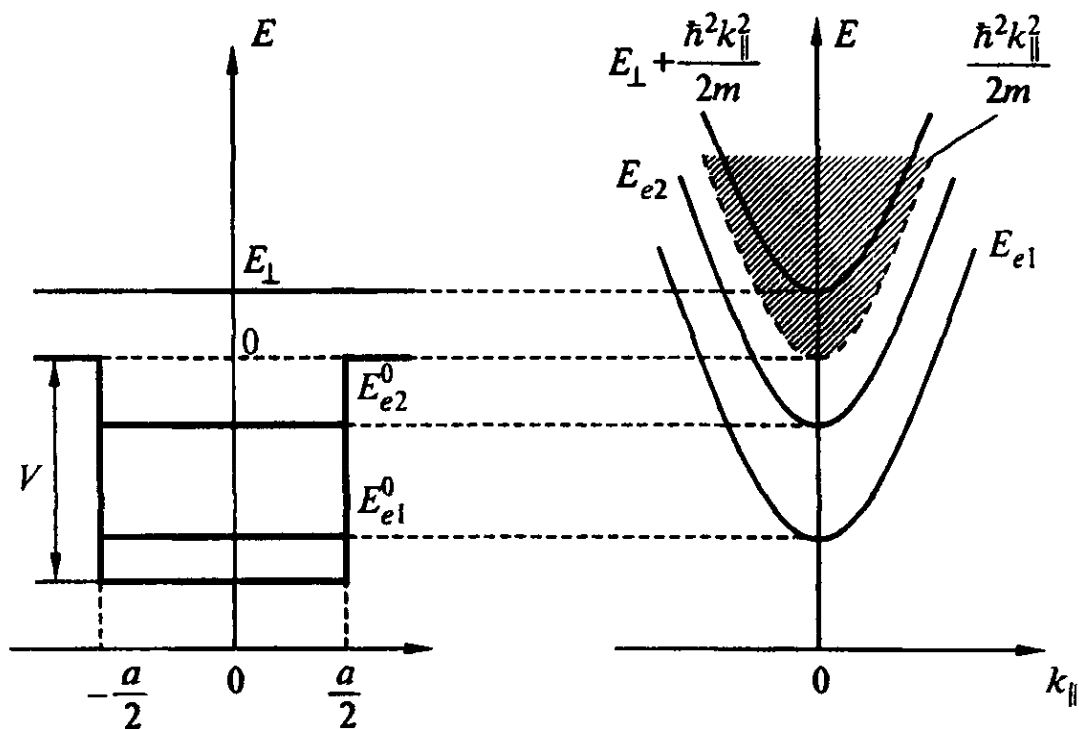


Рис. 11. К расчету волновых функций делокализованных состояний над ямой конечной глубины

движение и находится из одномерного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{\perp} - U(z)) \varphi = 0, \quad (3.51)$$

где  $E_{\perp} > 0$  — энергия поперечного движения, а потенциальная энергия  $U(z) = -V$  при  $|z| \leq a/2$  и  $U(z) = 0$  при  $|z| > a/2$ .

Все уровни континуума двукратно вырождены, и для каждого уровня симметричной ямы одно из стационарных состояний описывается четной волновой функцией, а другое — нечетной [13]. Правила отбора для оптических переходов в континуум описываются соотношениями, аналогичными формулам (3.13)—(3.15) для межподзонных переходов. Фотоионизацию может вызвать только свет, имеющий ненулевую  $z$ -компоненту вектора поляризации; двумерные волновые векторы электрона в начальном и конечном состояниях совпадают. При фотовозбуждении электронов из основной подзоны  $v = 1$  разрешены переходы только в нечетные состояния континуума.

Нечетную волновую функцию, удовлетворяющую уравнению (3.51), можно записать в виде:

$$\varphi_{E_{\perp}}(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} & \text{при } z < -a/2; \\ \varphi_2(z) = C \sin Kz & \text{при } |z| \leq a/2; \\ \varphi_3(z) = -Ae^{-ikz} - Be^{ikz} & \text{при } z > a/2, \end{cases} \quad (3.52)$$

где  $k = \sqrt{2mE_{\perp}}/\hbar$ ;  $K = \sqrt{2m(E_{\perp} + V)}/\hbar$ .

Условия непрерывности волновой функции и ее производной на левой границе  $z = -a/2$  приводят к уравнениям\*

$$Ae^{-ika/2} + Be^{ika/2} = -C \sin \frac{Ka}{2}, \quad (3.53)$$

$$ikAe^{-ika/2} - ikBe^{ika/2} = CK \cos \frac{Ka}{2}.$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  можно выразить через коэффициент  $C$ :

$$A = -\frac{i}{2} e^{-ika/2} \left( -i \sin \frac{Ka}{2} + \frac{K}{k} \cos \frac{Ka}{2} \right) C, \quad (3.54)$$

$$B = \frac{i}{2} e^{ika/2} \left( i \sin \frac{Ka}{2} + \frac{K}{k} \cos \frac{Ka}{2} \right) C,$$

---

\* Аналогичные условия на правой границе  $z = a/2$  приводят к равносильной системе уравнений.



а последний можно найти из условия нормировки  $\varphi_{E_{\perp}}(z)$  на  $\delta$ -функцию:

$$\int dz \varphi_{E_{\perp}}^*(z) \varphi_{E_{\perp}}(z) = \delta(E'_{\perp} - E_{\perp}). \quad (3.55)$$

Как известно, нормировка на  $\delta$ -функцию от энергии обеспечивается, если сумма потоков в волнах, бегущих по направлению к началу координат с положительной и отрицательной сторон оси  $z$ , равна  $1/2 \pi \hbar$  [13]:

$$\frac{\hbar}{2m} \left| \varphi_1^+ \frac{d}{dz} \varphi_1^{+*} - \varphi_1^{+*} \frac{d}{dz} \varphi_1^+ \right| + \frac{\hbar}{2m} \left| \varphi_3^- \frac{d}{dz} \varphi_3^{-*} - \varphi_3^{-*} \frac{d}{dz} \varphi_3^- \right| = \frac{1}{2\pi\hbar}, \quad (3.56)$$

где  $\varphi_1^+ = Ae^{ikz}$ ,  $\varphi_3^- = -Ae^{-ikz}$ , а символ  $*$  означает комплексное сопряжение. Отсюда получаем:

$$\frac{\hbar}{2m} 4k|A|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}, \quad (3.57)$$

и с учетом (3.54)

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{4k^2 |A|^2}{k^2 \sin^2 \frac{Ka}{2} + K^2 \cos^2 \frac{Ka}{2}} = \\ &= \frac{mk}{\pi\hbar^2 \left( k^2 \sin^2 \frac{Ka}{2} + K^2 \cos^2 \frac{Ka}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Чтобы исследовать спектр фотоионизации вблизи порога, надо знать свойства волновой функции континуума при малых энергиях  $E_{\perp} \rightarrow 0$  (что равносильно  $k \rightarrow 0$ ). В общем случае, когда  $\cos^2(Ka/2) \neq 0$ , получаем:  $C^2 \propto k \propto \sqrt{E_{\perp}} \rightarrow 0$  при  $E_{\perp} \rightarrow 0$ . Следовательно, электрон, движущийся вне ямы с малой энергией  $E_{\perp}$ , эффективно отражается от стенок ямы и практически не проникает внутрь нее, т. е. в область  $|z| < a/2$ .

Особый случай представляют так называемые резонансные ямы, для которых выполнено условие

$$\cos^2 \frac{Ka}{2} = 0. \quad (3.59)$$

В этом случае, согласно (3.58), получаем  $C^2 \propto 1/k \propto 1/\sqrt{E_{\perp}} \rightarrow \infty$  при  $E_{\perp} \rightarrow 0$ . Таким образом, при малых  $E_{\perp}$  электрон, находящийся в яме, как бы резонансно усиливается. Можно сказать, что квантовая яма представляет собой резонатор Фабри—Перо для электронных волн де Бройля.

При  $E_{\perp} \ll V$  условие резонанса (3.59) эквивалентно равенству

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2mV} \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} (2\mu - 1), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.60)$$

то есть

$$V = (2\mu - 1)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (3.61)$$

Сравнивая (3.61) с формулой (2.3) для уровней в бесконечно глубокой яме, можно сделать вывод, что для состояний континуума с нечетной волновой функцией данная яма является резонансной, если ее глубина равна энергии какого-либо нечетного уровня\* для бесконечно глубокой ямы такой же ширины.

Перейдем к расчету оптического поглощения, сопровождающего процесс фотоионизации квантовых ям в MQW-структуре с периодом  $(a + b)$  и площадью  $S$ . Для перехода из состояния  $i = |c, v=1, k_{\parallel}\rangle$  в состояние  $f = |c, E_{\perp}, k'_{\parallel}\rangle$  дипольный матричный элемент равен (по аналогии с формулой (3.13)):

$$e \cdot p_{fi} = e_z \delta_{k'_{\parallel}, k_{\parallel}} M(E_{\perp}), \quad (3.62)$$

где через  $M(E_{\perp})$  мы обозначили интеграл:

$$M(E_{\perp}) = \int dz \varphi_{E_{\perp}}^*(z) \hat{p}_z \varphi_{e1}(z). \quad (3.63)$$

Отметим, что в силу нормировки (3.56) размерность  $M(E_{\perp})$ , а значит, и  $e \cdot p_{fi}$  равна [импульс/энергия].

По аналогии с (3.2) коэффициент поглощения можно записать в виде

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2 e_z^2}{n_b c m^2 \omega S(a+b)} \times$$

---

\* Отметим, что в формуле (2.3) отсчет энергий электрона ведется от дна ямы

$$\times \int_0^{\infty} dE_{\perp} \sum_{k'_{\parallel}} \sum_{k_{\parallel}} \delta_{k'_{\parallel}, k_{\parallel}} |M(E_{\perp})|^2 [f(E_i) - f(E_f)] \delta(E_f - E_i - \hbar\omega), \quad (3.64)$$

где проводится суммирование по квантовым числам  $k'_{\parallel}$  и  $k_{\parallel}$ , характеризующим движение электрона в плоскости квантовой ямы в конечном и начальном состояниях, и интегрирование по энергии  $E_{\perp}$ , характеризующей поперечное движение в конечном состоянии.

Перейдем в (3.64) от суммирования по  $k'_{\parallel}$  и  $k_{\parallel}$  к интегрированию:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) = & \frac{4\pi^2 e^2 e_z^2}{n_b c m^2 \omega S(a+b)} \int_0^{\infty} dE_{\perp} \times \\ & \times \int \frac{2S}{(2\pi)^2} dk_{\parallel} |M(E_{\perp})|^2 \delta(E_{\perp} - E_{e1}^0 - \hbar\omega) \times \\ & \times \left[ f\left(E_{e1}^0 + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m}\right) - f\left(E_{\perp} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Обозначим  $E_{\parallel} = \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m$  и пренебрежем заселенностью состояний в континууме, т. е. положим  $f(E_{\perp} + E_{\parallel}) \approx 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) = & \frac{4\pi^2 e^2 e_z^2}{n_b c m^2 \omega (a+b)} \int_0^{\infty} dE_{\perp} |M(E_{\perp})|^2 \delta(E_{\perp} - E_{e1}^0 - \hbar\omega) \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{2}{(2\pi)^2} 2\pi \frac{m}{\hbar^2} f(E_{e1}^0 + E_{\parallel}) dE_{\parallel}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Используя нормировку функции распределения на поверхностную концентрацию

$$N_s = \frac{m}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} dE_{\parallel} f(E_{e1}^0 + E_{\parallel}), \quad (3.67)$$

после интегрирования  $\delta$ -функции получаем:

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2 e_z^2 N_s}{n_b c m^2 \omega (a+b)} |M(E_{e1}^0 + \hbar\omega)|^2. \quad (3.68)$$

Очевидно, что вблизи порога фотоионизации, когда

$$E_{e1}^0 + \hbar\omega \equiv \hbar\omega - |E_{e1}^0| \geq 0, \quad (3.69)$$

спектральная зависимость коэффициента поглощения определяется величиной  $|M(\hbar\omega - |E_{e1}^0|)|^2$ .

Поскольку волновая функция начального состояния  $\varphi_{e1}(z)$  локализована преимущественно внутри ямы, а амплитуда конечного состояния  $\varphi_{E_{\perp}}(z)$  в этой области определяется коэффициентом  $C$  (3.58), то, в соответствии с (3.63), можно заключить, что

$$\alpha(\hbar\omega) \propto C^2 \propto \begin{cases} (\hbar\omega - |E_{e1}^0|)^{1/2} & \text{для нерезонансных ям;} \\ (\hbar\omega - |E_{e1}^0|)^{-1/2} & \text{для резонансных ям.} \end{cases} \quad (3.70)$$

Итак, в нерезонансных ямах фотоионизация вблизи порога характеризуется бесконечно малым коэффициентом оптического поглощения, а в резонансных ямах, напротив, поглощение неограниченно возрастает.

Точный расчет [14] показывает, что вдали от порога ( $\hbar\omega \gg |E_{e1}^0|$ ) поглощение убывает по закону  $\alpha \propto (\hbar\omega)^{-3.5}$ , что позволяет проводить аналогию рассматриваемого процесса с процессом фотоионизации примесей в объемном полупроводнике.

На рис. 12 представлены результаты расчета коэффициента поглощения при фотоионизации резонансных (кривая 1) и нерезонансных (кривые 2—4) квантовых ям. На рис. 13 представлен спектр внутризонного поглощения для квантовой ямы с одним уровнем размерного квантования (расчет и эксперимент). В такой яме наблюдается только полоса фотоионизации. На рис. 14 представлены результаты расчета спектра внутризонного поглощения для квантовой ямы с двумя уровнями размерного квантования, где одновременно могут наблюдаться и межподзонное поглощение, и полоса фотоионизации. Из-за того что уровень  $E_{e2}$  очень близок к уровню барьера, узкий симметричный пик межподзонного поглощения сливается с широкой полосой фотоионизации и результирующая кривая поглощения имеет вид асимметричного пика. Именно такой спектр наблюдался экспериментально в MQW-структуре с соответствующими параметрами (см. ниже рис. 17, а).

Отметим, что учет плазменных эффектов устраняет отмеченную выше расхожимость коэффициента поглощения, соответствующего фотоионизации резонансных квантовых ям. Для нерезонансных квантовых ям в полосе фотоионизации плазменные

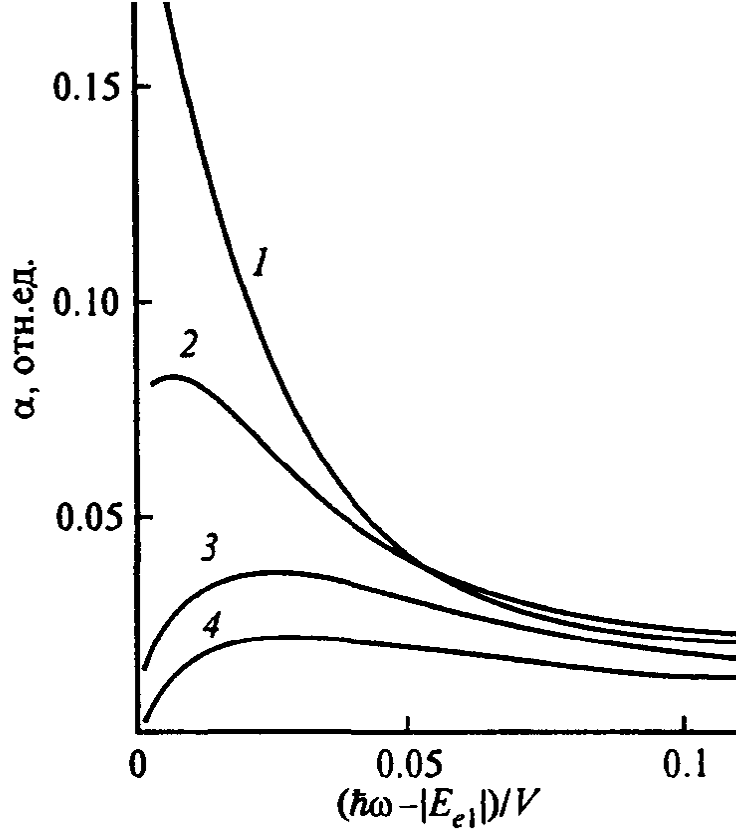


Рис. 12. Спектры внутризонного поглощения вблизи порога фотоионизации (расчет).

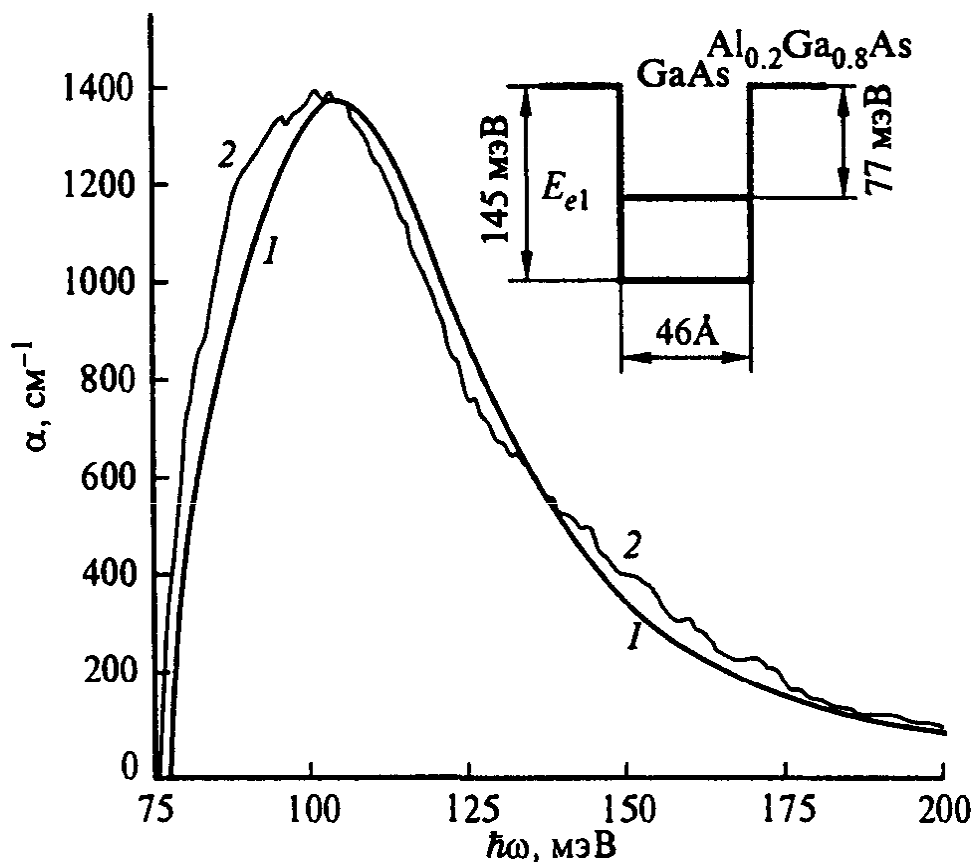


Рис. 13. Полоса фотоионизации для квантовых ям с одной подзоной размерного квантования.

1 — расчетная кривая; 2 — экспериментальная. Параметры структуры с периодическим набором квантовых ям GaAs/Al<sub>0.2</sub>Ga<sub>0.8</sub>As:  $a = 46 \text{ \AA}$ ,  $V = 145 \text{ мэВ}$ ,  $E_{el}^0 = -77 \text{ мэВ}$  [6].

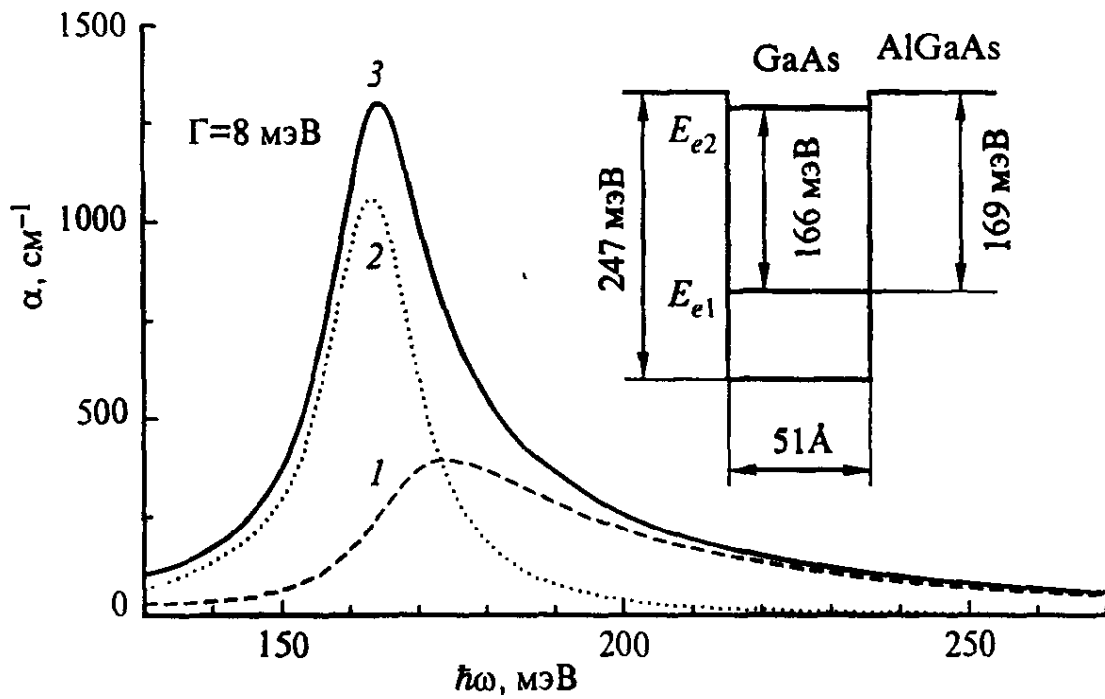


Рис. 14. Спектр внутризонного поглощения для квантовых ям с двумя подзонами размерного квантования (расчет).

1 — полоса фотоионизации; 2 — пик межподзонного поглощения, 3 — результирующее поглощение.

эффекты дают лишь небольшие поправки к коэффициенту поглощения [15, 16].

### 3.2.5. Влияние электрического поля на спектр внутризонного поглощения

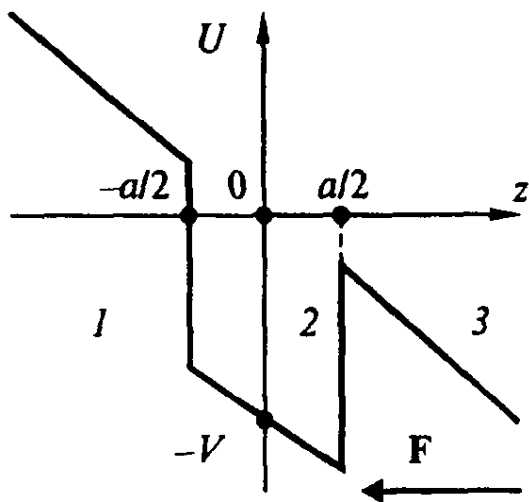


Рис. 15. Квантовая яма в поперечном электрическом поле.

Рассмотрим, к каким внутризонным оптическим эффектам приводит приложение электрического поля вдоль оси роста структуры с квантовой ямой (рис. 15). Такое поле обычно называют поперечным (по отношению к плоскости интерфейса). В этом случае движение в направлении оси  $z$  описывается одномерным уравнением Шредингера, где к потенциалу прямоугольной квантовой ямы  $U(z)$  добавляется линейный по  $z$  потенциал приложенного электрического поля  $F$ :

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E_{\perp} - U(z) + eFz \right] \varphi = 0. \quad (3.71)$$

Волновые функции электрона внутри квантовой ямы и по обеим сторонам от нее представляют собой линейные комбинации функций Эйри первого ( $Ai$ ) и второго ( $Bi$ ) рода:

$$\begin{aligned} \varphi_{E_{\perp}}(z) = \\ = \begin{cases} \varphi_1(z) = B_1 Ai[-\xi(z + z_B)] + B_2 Bi[-\xi(z + z_B)], & z < -a/2, \\ \varphi_2(z) = B_3 Ai[-\xi(z + z_A)] + B_4 Bi[-\xi(z + z_A)], & |z| \leq a/2, \\ \varphi_3(z) = B_5 Ai[-\xi(z + z_B)] + B_6 Bi[-\xi(z + z_B)], & z > a/2, \end{cases} \quad (3.72) \end{aligned}$$

где  $\xi = (2eFm/\hbar^2)^{1/3}$ ;  $z_A = (E_{\perp} + V)/(eF)$ ;  $z_B = E_{\perp}/(eF)$ .

Строго говоря, в данной задаче при любых энергиях движение электрона является инфинитным в положительном направлении оси  $z$ . Даже для электрона в глубине ямы имеется конечная вероятность туннелирования через треугольный потенциальный барьер в надбарьерную область, расположенную справа от ямы. Вследствие этого для ямы конечной глубины имеется континуум состояний не только над ямой, но и внутри нее. Коэффициенты  $B_1$ — $B_6$ , характеризующие волновую функцию при заданной энергии, находятся из условий непрерывности волновой функции и ее производной на границах ямы  $z = \pm a/2$ , которые дают четыре уравнения. Пятым условием является затухание функции  $\varphi_1$  при  $z \rightarrow -\infty$ , откуда  $B_2 = 0$ . Наконец, недостающее шестое уравнение дает условие нормировки на  $\delta$ -функцию (3.55). Можно показать,\* что из него следует уравнение

$$B_1 + B_6 = \frac{\xi^2}{eF}. \quad (3.73)$$

Вообще говоря, описанная система уравнений допускает аналитическое решение. И его можно легко получить, например, используя вычислительный пакет «Математика 3.0». Однако получаемые при этом алгебраические выражения для  $B_1$  и  $B_3$ — $B_6$  настолько громоздки, что привести их здесь не представляется возможным. Поэтому мы ограничимся описанием процедуры расчета и приведем затем численные результаты для конкретной структуры.

Для упрощения расчета используем следующее приближение. Положим, что для состояний в глубине ямы отсутствует

---

\* Для этого следует рассмотреть поток  $\varphi_3$  в направлении к началу координат при  $z = \infty$  и приравнять его  $1/2\pi\hbar$ . При этом удобно использовать известные асимптотики для функций Эйри.

туннелирование через треугольный барьер, т. е.  $\varphi_3(z \rightarrow \infty) = 0$ . Отсюда следует, что для этих состояний не только  $B_2 = 0$ , но и  $B_5 = 0$ . Для оставшихся четырех констант граничные условия дают однородную систему уравнений, которая имеет отличное от нуля решение, только если ее определитель равен нулю. Последнее условие позволяет найти энергии дискретных уровней  $E_{ev}$  в глубине ямы, соответствующих финитному движению вдоль оси  $z$ . Соответствующие им волновые функции обозначим  $\varphi_{ev}(z)$ . С ростом приложенного поля меняется наклон дна ямы, а также уменьшается высота треугольного потенциального барьера с правой стороны ямы, поэтому энергии дискретных уровней в ее глубине зависят от поля.

Для определенности проведем численный расчет спектра внутризонного поглощения в электрическом поле для квантовой ямы, имеющей в отсутствие поля два дискретных уровня, верхний из которых близок к потолку ямы. Будем использовать параметры ямы, указанные на рис. 14.

Для такой ямы в достаточно широкой области полей ( $F \ll F^* = \sqrt{mV^3}/\hbar e$ ) можно говорить о наличии дискретного основного уровня (подзоны) размерного квантования  $E_{e1}(F)$  и расположенного выше континуума возбужденных состояний. (Существующая при  $F = 0$  подзона  $E_{e2}(F)$  уже в слабых полях размывается в континуум состояний из-за туннелирования электрона через треугольный барьер).

Рассмотрим оптические переходы электронов из основной подзоны в континуум возбужденных состояний. С учетом свободного движения электрона в плоскости квантовой ямы плавные огибающие волновых функций начального ( $i$ ) и конечного ( $f$ ) состояний запишем в виде:

$$\psi_i(F, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} \exp(i\mathbf{k}_\parallel \mathbf{r}_\parallel) \varphi_{e1}(F, z); \quad (3.74)$$

$$\psi_f(F, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} \exp(i\mathbf{k}_\parallel \mathbf{r}_\parallel) \varphi_{E\perp}(F, z). \quad (3.75)$$

Расчет коэффициента поглощения при таких переходах полностью аналогичен описанной выше процедуре для процесса фотоионизации квантовой ямы (см. формулы (3.62)—(3.68)) и приводит к результату:

$$\alpha_F(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2 e_z^2 N_s}{n_b c m^2 \omega (a+b)} \left| M_F [E_{e1}^0(F) + \hbar\omega] \right|^2, \quad (3.76)$$



где

$$M_F(E_{el}) = \int dz \varphi_{E_{\perp}}^*(F, z) \varphi_{el}(F, z). \quad (3.77)$$

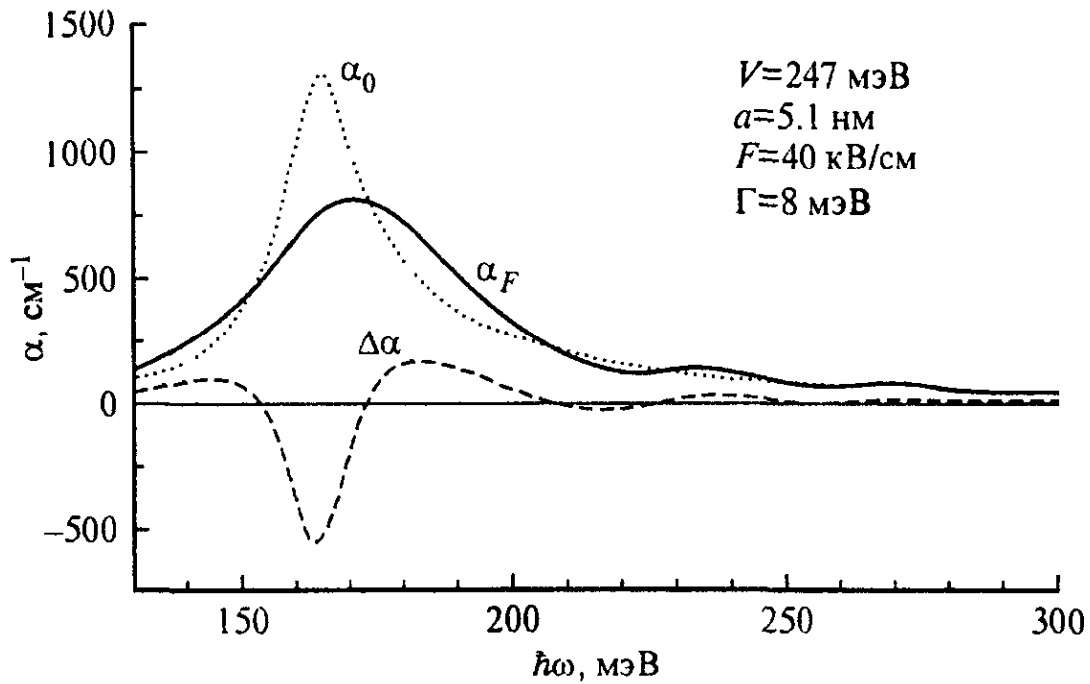


Рис. 16. Спектры поглощения MQW-структуры в поперечном электрическом поле  $\alpha_F$  и в его отсутствие  $\alpha_0$ , а также кривая электропоглощения  $\Delta\alpha = \alpha_F - \alpha_0$ .

Расчет для ямы, показанной на вставке к рис. 14.

На рис. 16 представлены результаты расчета спектра внутризонного поглощения для поля  $F = 40$  кВ/см  $\ll F^* \approx 2000$  кВ/см. Для сравнения на этом же рисунке приведен равновесный спектр, который анализировался ранее (см. рис. 14). Во-первых, электрическое поле приводит к уширению пика межподзонного поглощения и его сдвигу в коротковолновую область. Это так называемый эффект Штарка, который обусловлен уширением квазидискретного уровня  $E_{e2}$  и его сдвигом относительно уровня  $E_{e1}$  за счет увеличения наклона дна ямы и возрастания прозрачности барьера в сильном электрическом поле. Во-вторых, в полосе фотоионизации возникают квазипериодические осцилляции поглощения, период которых растет с ростом поля. Период осцилляций близок к межуровневому расстоянию в спектре энергетических уровней для треугольной потенциальной ямы с бесконечной вертикальной стенкой [17]:

$$E_n - E_{n-1} = \frac{3\pi}{4} \left( \frac{eF\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^{2/3} \left[ \left( 2n - \frac{1}{2} \right)^{2/3} - \left( 2n - \frac{5}{2} \right)^{2/3} \right]. \quad (3.78)$$

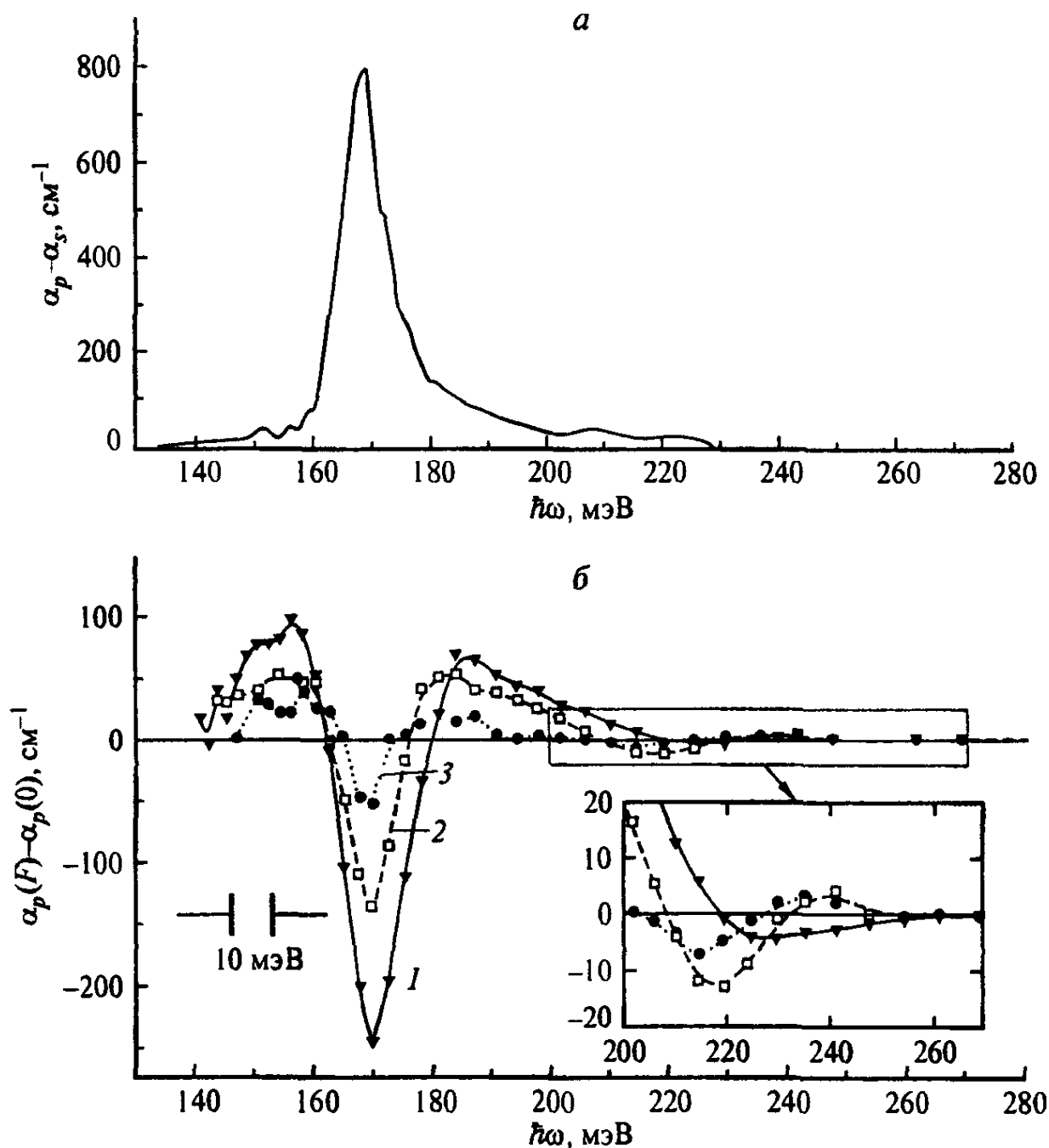


Рис. 17. Равновесный спектр поглощения MQW-структуры (а) и кривые электропоглощения для света  $p$ -поляризации при различных напряженностях  $F$  поперечного поля (б) [18].

Эксперимент для структуры, показанной на вставке к рис 14.  
Значения  $F$ , кВ/см. 1 — 70; 2 — 24, 3 — 12.

На рис. 17 представлены результаты эксперимента для квантовых ям, параметры которых соответствуют рассмотренной модели. Спектр наблюдавшегося электропоглощения  $\Delta\alpha(\omega) = \alpha_F(\omega) - \alpha_0(\omega)$  качественно совпадает с результатами расчета, приведенными на рис. 16. Варьируя модельные параметры в расчете и подгоняя его результаты под эксперимент, можно, в принципе, независимо определить параметры квантовых ям — их ширину  $a$  и глубину  $V$ .

### 3.2.6. Межподзональные переходы дырок

В предыдущих разделах подробно описано поглощение света, сопровождающееся межподзональными переходами электронов в квантовых ямах. Размерное квантование приводит, естественно, и к появлению подзон в валентной зоне. Межподзональные переходы дырок, однако, имеют свои особенности, это связано со сложной структурой валентной зоны в большинстве полупроводников, в частности в соединениях  $A_3B_5$ , наиболее широко применяющихся при изготовлении наноструктур.

Валентная зона  $\Gamma_8$  в полупроводниках  $A_3B_5$  состоит из двух вырожденных в точке  $\Gamma$  ветвей тяжелых и легких дырок. В квантовой яме каждая ветвь рождает свою серию подзон. При отличном от нуля волновом векторе дырки  $k_{\parallel}$ , характеризующем ее движение в плоскости интерфейса, подзональные состояния из разных серий смешиваются и энергетическая дисперсия дырок описывается сложной непараболической зависимостью. Подробно этот вопрос рассмотрен в п. 2.3.

Рассмотрим для примера квантовую яму  $\text{In}_{0.49}\text{Ga}_{0.51}\text{P}/\text{GaAs}$ . На рис. 18, а приведен энергетический спектр дырок в такой структуре. Из-за смешивания состояний легких и тяжелых дырок при  $k_{\parallel} \neq 0$  подзоны размерного квантования не могут быть описаны определенной эффективной массой, однако для удоб-

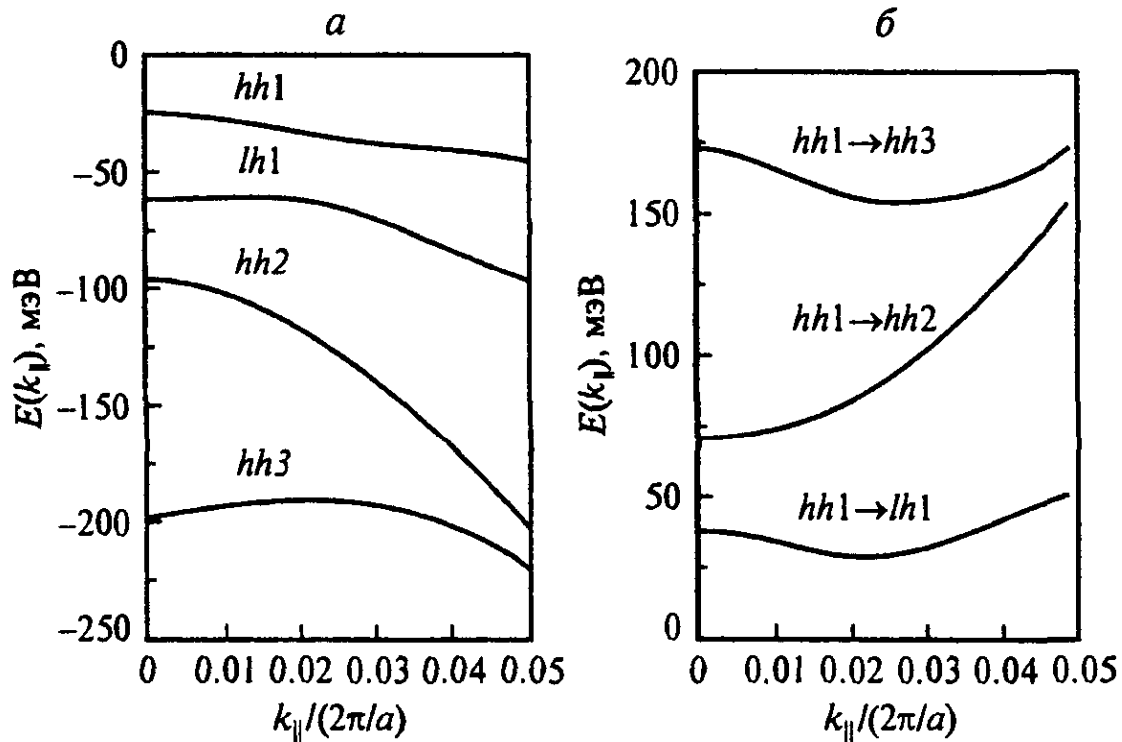


Рис. 18. Схема подзон размерного квантования в квантовой яме  $\text{In}_{0.49}\text{Ga}_{0.51}\text{P}/\text{GaAs}$  (а). Энергии переходов между основной и первыми тремя возбужденными подзонами (б).

Ширина ямы  $a = 5$  нм [19].

ства подзоны обозначают индексом, соответствующим эффективной массе при  $k_{\parallel} = 0$ :  $hh$  обозначают тяжелые дырки (*heavy holes*), а  $lh$  — легкие дырки (*light holes*).

Наличие подобной зонной структуры приводит к двум следствиям.

1. Как видно из рис. 18, б, расстояние между дырочными подзонами в отличие от электронных немонотонно меняется. Это приводит к тому, что коэффициент межподзонного поглощения уже не имеет форму  $\delta$ -образного пика даже в отсутствие уширения линии из-за рассеяния. Спектр поглощения определяется частотной зависимостью приведенной плотности состояний  $\rho(\omega)$ , возникающей при проведении суммирования в (3.2) (для случая межподзонных переходов электронов  $\rho(\omega) \propto \delta[(E_f - E_i - \hbar\omega)/\hbar]$ ).

В приближении сферических изоэнергетических поверхностей, когда  $E(k_{\parallel})$  не зависит от направления волнового вектора  $k_{\parallel}$ , можно получить:

$$\rho(\omega) = \sum_{k_{\parallel}^{\omega}} \frac{k_{\parallel}^{\omega}}{\pi} \left| \frac{d[E_f(k_{\parallel}) - E_i(k_{\parallel})]}{dk_{\parallel}} \right|^{-1}, \quad (3.79)$$

где  $k_{\parallel}^{\omega}$  — корни уравнения  $E_f(k_{\parallel}) - E_i(k_{\parallel}) - \hbar\omega = 0$ . Из выражения (3.79) следует, что если подзоны  $f$  и  $i$  имеют равный наклон в точке  $k_{\parallel}^{\omega}$ , то  $\rho(\omega)$  становится бесконечной и в спектре поглощения  $\alpha(\omega)$  должны наблюдаться особенности. Для рассматриваемой структуры такие особенности должны проявляться при  $\hbar\omega \approx 150$  мэВ (переходы  $hh1 \rightarrow hh3$ ) и при  $\hbar\omega \approx 25$  мэВ (переходы  $hh1 \rightarrow lh1$ ). Если мы учтем гофрировку изоэнергетических поверхностей, то величина  $k_{\parallel}^{\omega}$  окажется зависящей от направления волнового вектора  $k_{\parallel}$  и суммирование по  $k_{\parallel}^{\omega}$  в (3.79) приведет к уширению пика и конечному значению  $\alpha(\omega)$ . Конечно, значительное влияние на форму спектра  $\alpha(\omega)$  оказывает и зависимость матричного элемента перехода  $e \cdot p_{fi}$  от  $k_{\parallel}$ .

2. В квантовых ямах  $p$ -типа существует сильное смешивание состояний легких и тяжелых дырок при  $k_{\parallel} \neq 0$ . Физически это можно понять из следующих соображений. В объемном материале дырочные состояния различаются величиной проекции момента на направление  $k$ : тяжелым дыркам соответствуют проекции  $\pm 3/2$ , а легким — проекции  $\pm 1/2$ . При движении только поперек квантовой ямы ( $k_{\parallel} = 0$ ) проекция момента на нормаль к ней сохраняется, поэтому при отражении частицы от интерфейса проекция момента на первоначальное направление импульса не меняется. Если же частица движется и вдоль слоев, то при отражении может произойти изменение проекции момента. Это

означает возможность превращения легкой дырки в тяжелую и наоборот — при отражении от интерфейса. Поэтому при ненулевых  $k_{\parallel}$  дырочные состояния уже нельзя классифицировать по проекции углового момента  $J_z$ . Математически это выражается в том, что в базисе (2.27) у волновой функции появляются все четыре компоненты. Например, для состояний, соответствующих при  $k_{\parallel} = 0$  тяжелым дыркам с  $J_z = \pm 3/2$ ,

$$\hat{\Psi}_{hh, k_{\parallel}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}} \hat{F}_{\pm 3/2}(\mathbf{k}_{\parallel}, z), \quad (3.80)$$

$$\hat{F}_{3/2} = \begin{bmatrix} C(z) \\ u_1 S(z) \\ u_2 C(z) \\ u_3 S(z) \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_{-3/2} = \begin{bmatrix} u_3^* S(z) \\ u_2^* C(z) \\ u_1^* S(z) \\ C(z) \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Здесь  $u_n \sim (k_{\parallel})^n$ , а  $C(z)$  и  $S(z)$  — соответственно четная и нечетная функции координаты  $z$ . Их явный вид определяется из граничных условий.

Оператор импульса, а точнее оператор скорости

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}(\Gamma_8)}{\partial \mathbf{k}},$$

определяющий интенсивность внутризонных переходов, также имеет при  $k_{\parallel} \neq 0$  недиагональные компоненты. Это приводит к отличным от нуля матричным элементам между любыми из квантованных дырочных состояний, а значит, и к снятию правил отбора по поляризации: в отличие от квантовых ям  $n$ -типа в данном случае коэффициенты поглощения света с поляризацией  $e_z$  и  $e_{x,y}$  сопоставимы.

На рис. 19 приведены зависимости квадрата матричного элемента скорости для переходов дырок между подзонами в рассматриваемой структуре при двух поляризациях света. Мы видим, что правила отбора по номеру подзоны при  $k_{\parallel} \neq 0$  отсутствуют, однако для не очень больших значений  $k_{\parallel}$  наибольший вклад в поглощение для  $e \perp z$  дают переходы  $hh1 \rightarrow hh3$ , а для  $e \parallel z$  — переходы  $hh1 \rightarrow hh2$ .

Рассчитанный спектр поглощения, учитывающий как зависимость матричного элемента от  $k_{\parallel}$ , так и спектральную зависимость приведенной плотности состояний, показан на рис. 20. Различные значения энергии Ферми соответствуют различному уровню легирования структуры. При увеличении степени легирования все более высокоэнергетичные состояния подзоны  $hh1$

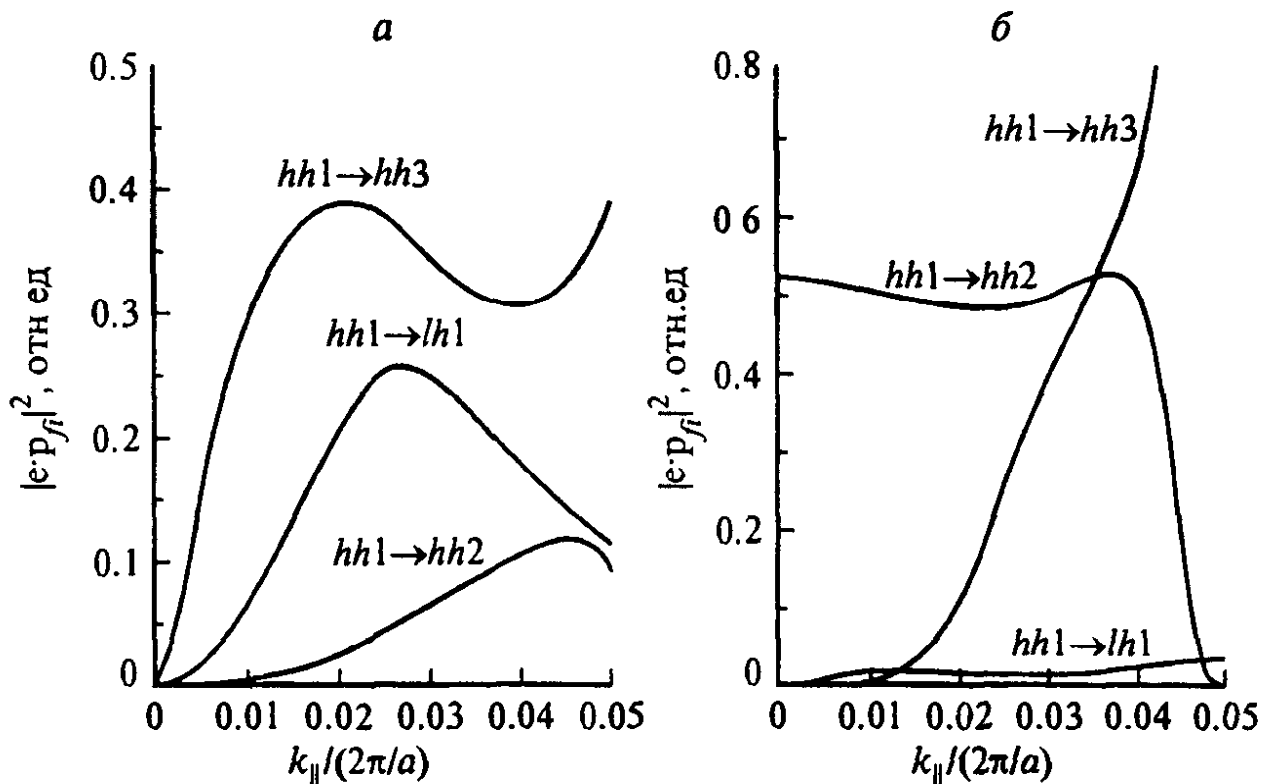


Рис 19. Зависимости квадрата матричного элемента  $|e \cdot p_{fi}|^2$  для переходов между основной и первыми тремя возбужденными подзонами [19]

*a* — свет поляризован в плоскости структуры,  $e \perp z$ , *б* — свет поляризован вдоль оси роста,  $e \parallel z$ . Параметры структуры те же, что и на рис 18

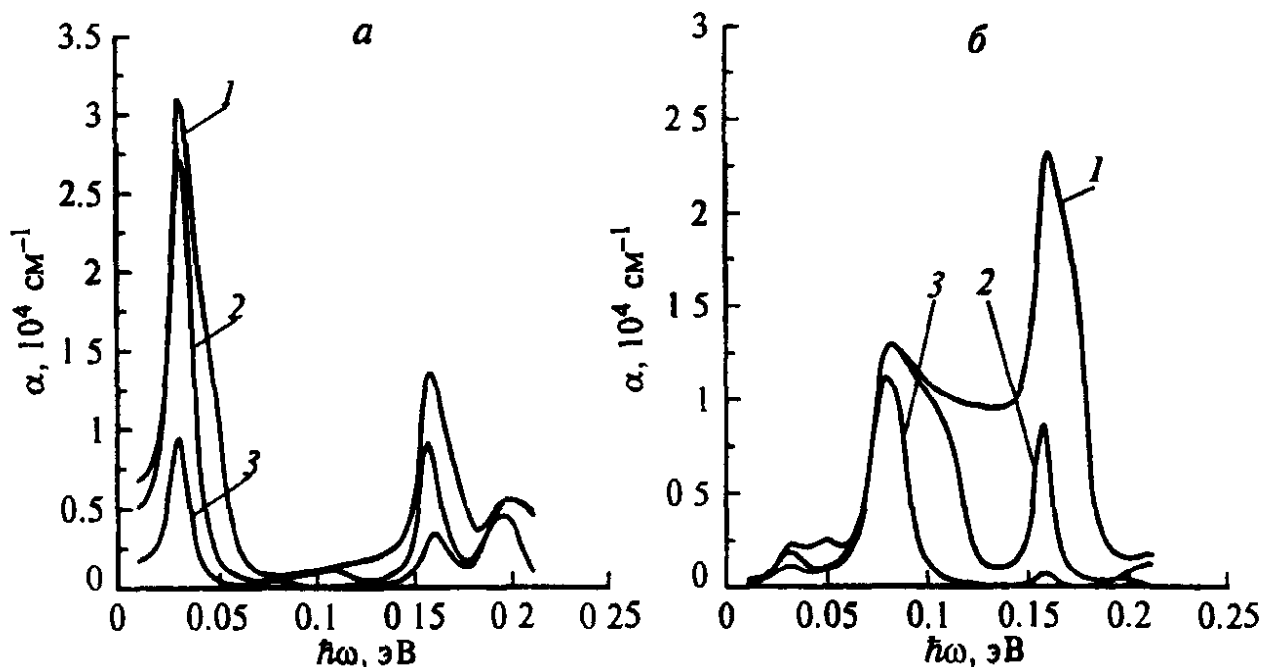


Рис. 20. Спектры межподзонного поглощения для двух поляризаций света [19]

*a* — свет поляризован в плоскости структуры,  $e \perp z$ , *б* — свет поляризован вдоль оси роста,  $e \parallel z$ . Параметры структуры те же, что на рис 18. Различному уровню легирования соответствуют различные значения энергии Ферми  $E_f$ , эВ:  $-0.045$  (кривая 1),  $-0.04$  (кривая 2),  $-0.035$  (кривая 3).

вовлекаются в поглощение. Особенности в спектрах и их зависимость от уровня легирования соответствуют особенностям приведенной плотности состояний (рис. 18) и поведению матричных элементов (рис. 19).

В работе [20] изучался эффект, обратный поглощению, — спонтанное излучение. Дыроочный газ разогревался электрическим полем, что приводило к заселению высокоэнергетических состояний. Оптические переходы из них в нижние подзоны сопровождались излучением квантов света. Интенсивность спонтанной эмиссии излучения частоты  $\omega$  определяется тем же матричным элементом оператора скорости, что и коэффициент поглощения (3.2):

$$I(\omega) = \frac{4\pi e^2 \omega n}{c^3 \Omega} \sum_{i,f} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_{fi}|^2 f(E_i) [1 - f(E_f)] \delta(E_f - E_i - \hbar\omega). \quad (3.82)$$

Множитель  $f(E_i)[1 - f(E_f)]$  есть вероятность того, что состояние  $|i\rangle$  занято, а состояние  $|f\rangle$  свободно.

Спектр спонтанного излучения дырок в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.5</sub>Ga<sub>0.5</sub>As представлен на рис. 21 сплошной кривой. Полосы со штриховкой показывают расчетные диапазоны энергий квантов для переходов, в которых имеются пики в приведенной плотности состояний. На том же рисунке штриховой линией показан теоретически рассчитанный спектр неполяризо-

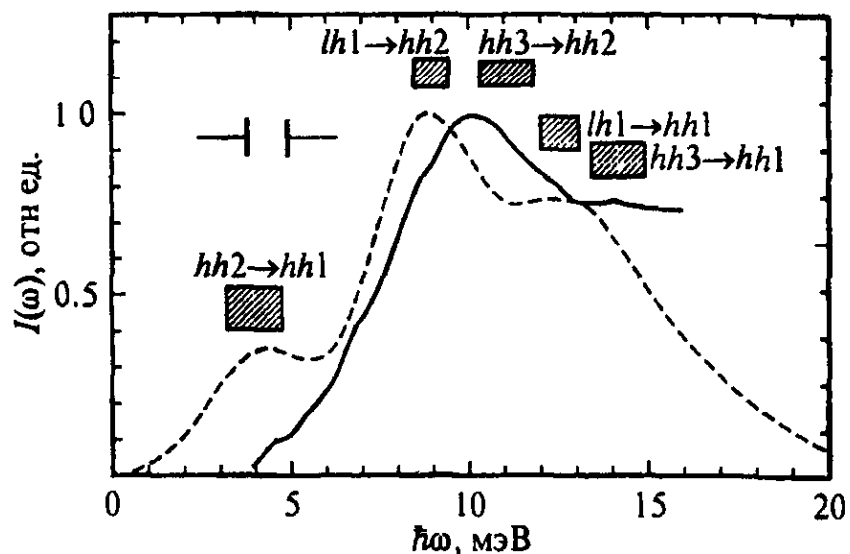


Рис. 21. Наблюдаемый спектр спонтанного излучения в квантовых ямах GaAs/Al<sub>0.5</sub>Ga<sub>0.5</sub>As p-типа [20] (сплошная кривая).

Штриховая кривая — теоретический расчет полусуммы спектров излучения для поляризаций света  $\mathbf{e} \parallel z$  и  $\mathbf{e} \perp z$ . Для соответствующих переходов указаны диапазоны энергий, в которых  $\rho(\omega)$  имеет особенности

ванного излучения, полученный как полусумма спектров при  $e \parallel z$  и  $e \perp z$ . Согласно расчетам вероятностей переходов, величина и положение основного пика определяются фактически переходами  $lh1 \rightarrow hh2$ , а переходы  $lh1 \rightarrow hh1$  и  $hh3 \rightarrow hh1$  дают вклад в плечо справа от него примерно в равной степени. Видно, что рассчитанный спектр излучения находится в согласии с экспериментальными данными.

Наличие значительного поглощения при поляризации света в плоскости структуры ( $e \perp z$ ) позволяет эффективно использовать квантовые ямы  $p$ -типа в фотоприемниках инфракрасного излучения, так как отпадает необходимость в сложных или малоэффективных способах активации межподзонных переходов в структурах  $n$ -типа.

### 3.2.7. Внутриподзонное поглощение света

Рассмотрим еще раз матричный элемент, определяющий внутризонное поглощение света ( $n_i = n_f$  в (3.9)), теперь применительно к случаю внутриподзонных оптических переходов ( $v = v'$ ):

$$\begin{aligned} e \cdot p_{fi} &= \langle u_{n\mathbf{k}'} | e \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n\mathbf{k}} \rangle \int_{\Omega} \psi_f^* \psi_i d\mathbf{r} + \int_{\Omega} \psi_f^* e \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_i d\mathbf{r} = \\ &= \langle u_{n\mathbf{k}'} | e \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n\mathbf{k}} \rangle \frac{1}{S} \int_{\Omega} d\mathbf{r} \varphi_{v'}^*(z) \exp(-i\mathbf{k}'_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}) \varphi_v(z) \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}) + \\ &\quad + \frac{1}{S} \int_{\Omega} d\mathbf{r} \varphi_{v'}^*(z) \exp(-i\mathbf{k}'_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}) \times \\ &\quad \times (e_x \hat{p}_x + e_y \hat{p}_y + e_z \hat{p}_z) \varphi_v(z) \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_{\parallel}), \end{aligned} \quad (3.83)$$

где  $\mathbf{k}_{\parallel}$  и  $\mathbf{k}'_{\parallel}$  — двумерные волновые векторы начального ( $i$ ) и конечного ( $f$ ) состояний; индексы  $v$  и  $v'$  обозначают начальную и конечную подзоны соответственно. Оптический матричный элемент (3.10) для внутризонных переходов выражается следующим образом [21, Прил. 12]:

$$\langle u_{n\mathbf{k}} | \hat{\mathbf{p}} | u_{n\mathbf{k}} \rangle = \frac{m_0}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} - \hbar \mathbf{k}. \quad (3.84)$$

Будем рассматривать параболический закон дисперсии:  $E = \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m$ . Тогда (3.83) можно переписать следующим образом:



$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{fi} = & \frac{m_0}{m} (e_x \hbar k_x + e_y \hbar k_y) \delta_{v,v'} \delta_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} + \\ & + e_z \delta_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \int dz \varphi_{v'}^*(z) \hat{p}_z \varphi_v(z). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Согласно (3.85), матричный элемент внутриподзонного оптического поглощения ( $v = v'$ ) равен нулю для поляризации света  $\mathbf{e} \parallel OZ$ . Свет, поляризованный в плоскости квантовой ямы, может приводить к переходам только в пределах одной подзоны с сохранением импульса:  $\mathbf{k}_{\parallel} = \mathbf{k}'_{\parallel}$  (волновой вектор света полагаем малым). В первом порядке теории возмущений, в рамках которого получена формула (3.2), поглощение отсутствует, так как при этом не выполняется закон сохранения энергии:  $E_f = E_i + \hbar\omega$ . Мы пришли к результату, известному для объемных полупроводников: внутризонное (в данном случае — внутриподзонное) поглощение света невозможно без привлечения третьего тела, например фонона, взаимодействие с которым позволит одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса:  $E_f = E_i + \hbar\omega \pm \hbar\omega_0$ ,  $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} \pm \mathbf{k}_{ph}$ . (Здесь  $\hbar\omega_0$  и  $\hbar\mathbf{k}_{ph}$  — энергия и импульс фонона).

Коэффициент внутриподзонного поглощения может быть рассчитан с использованием второго порядка теории возмущений. Напомним, что коэффициент поглощения может быть найден из следующего соотношения:

$$\alpha(\omega) = \frac{n}{c} \left( W^{abs} - W^{em} \right), \quad (3.86)$$

где  $W^{abs}$  и  $W^{em}$  — вероятности оптических переходов с поглощением (*absorption*) и испусканием (*emission*) фотона. В рамках второго порядка теории возмущений эти вероятности записываются как

$$W^{abs, em} = \sum_f \sum_i \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_m \frac{H^{\omega} H^s_{\pm}}{\tilde{E}_i - \tilde{E}_m} \right|^2 f_{\mathbf{k}_{\parallel}} (1 - f_{\mathbf{k}'_{\parallel}}) \delta(\tilde{E}_f - \tilde{E}_i). \quad (3.87)$$

Здесь  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{E}_f$  и  $\tilde{E}_m$  — полные энергии системы «электрон + фотон + третья частица» в начальном, конечном и промежуточном состояниях, отличающиеся для процессов с поглощением и испусканием фотона;  $H^{\omega}$  — матричный элемент энергии взаимодействия электрона с полем световой волны;  $H^s_{\pm}$  — матричный элемент энергии взаимодействия электрона с фононом («+» соот-

ветствует излучению, а «-» — поглощению фонона). Функции распределения  $f$  учитывают заполнение начального и конечного состояний. Заметим, что выражение под знаком суммы по  $m$  представлено в схематическом виде и на самом деле включает сумму двух вкладов, описывающих два двухквантовых процесса: в одном из которых на первом этапе происходит взаимодействие с фотоном, а в другом — на первом этапе электрон взаимодействует с третьей частицей.

Основной вклад во внутризонное поглощение в объемных полупроводниках дают переходы электронов с рассеянием на фононах и примесях. В квантовых ямах присутствует также рассеяние на несовершенствах интерфейсов (границы раздела), образующих квантовую яму (например, на границах GaAs/AlGaAs в структурах AlGaAs/GaAs/AlGaAs). Эти механизмы рассеяния дают различный вклад в поглощение для разных температур и разных участков спектра. Мы ограничимся описанием внутриподзонного поглощения света при рассеянии на полярных оптических фононах, относительная роль которого обычно достаточно велика.

Выражение (3.87) может быть проиллюстрировано на энергетической диаграмме (рис. 22). Реальный переход электрона с поглощением кванта света и взаимодействием с фооном (а) удобно представить как протекающий в два этапа (т. е. разбить на два последовательных виртуальных перехода): один описы-

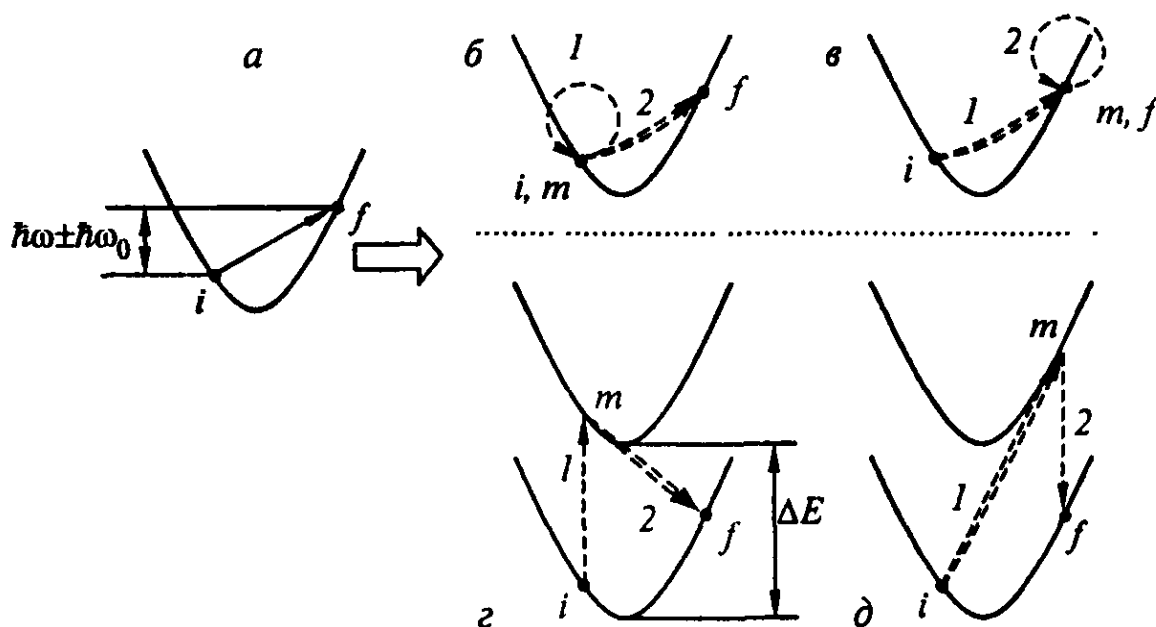


Рис. 22. Схемы реального (а) и виртуальных (б — д) переходов при внутриподзонном поглощении.

б, в — начальное, конечное и промежуточное состояния в одной подзоне, г, д — промежуточное состояние в другой подзоне. Одинарные линии — переходы при взаимодействии электрона с фотоном; двойные линии — виртуальные переходы при взаимодействии электрона с фооном. Показан «порядок следования» виртуальных переходов.

вает взаимодействие электрона с фотоном, другой — с фоном. Подчеркнем, что это только удобный способ описания, на самом деле взаимодействие этих трех частиц не может быть разделено во времени.

Для виртуального перехода действует закон сохранения импульса, он, как и правила отбора для перехода, определяется матричными элементами  $H^{\omega}$  и  $H_{\pm}^s$ . Промежуточное состояние  $m$  короткоживущее, и это приводит к тому, что закон сохранения энергии при виртуальном переходе не выполняется. Действительно,  $\delta$ -функция в формуле (3.87) определяет закон сохранения энергии только для реального перехода  $i \rightarrow f$ . На рис. 22, б и в показаны возможные виртуальные переходы с промежуточным состоянием  $m$  в пределах той же подзоны. В случае (б)  $m = i$ , в случае (в)  $m = f$  (с точностью до волнового вектора фотона). Как мы уже знаем, матричный элемент внутриподзонного оптического перехода отличен от нуля только для света, поляризованного в плоскости слоя, следовательно, и весь реальный процесс в этих случаях подчиняется этому же правилу отбора:  $\mathbf{e} \perp OZ$ . Однако промежуточное состояние может находиться и в другой подзоне, как показано на рис. 22, г и д. Действительно, закон сохранения импульса для таких оптических переходов выполнен — переходы прямые.

Прямые межподзонные переходы для электрона, как мы уже знаем, подчиняются другому правилу отбора по поляризации света: вектор поляризации должен быть направлен вдоль оси роста, т. е. перпендикулярно плоскости квантовой ямы. Следовательно, возможно внутриподзонное поглощение света в квантовых ямах и для поляризации  $\mathbf{e} \parallel OZ$ . Такие переходы описываются формулой (3.87) с промежуточными состояниями в других подзонах. В настоящем издании мы не будем рассматривать такие переходы: можно показать, что их вклад в поглощение при  $\hbar\omega \ll \Delta E$  существенно меньше вклада от переходов типа (б) и (в) (см. рис. 22).

Используя (3.9), несложно получить матричный элемент  $H^{\omega}$  для переходов в пределах одной подзоны между состояниями  $\mathbf{k}_{\parallel}$  и  $\mathbf{k}'_{\parallel}$  ( $\mathbf{k}_{\parallel} \approx \mathbf{k}'_{\parallel}$ ):

$$H^{\omega} = \frac{e}{mc} \langle F_f(\mathbf{r}) | \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} | F_i(\mathbf{r}) \rangle =$$

$$= \frac{e\hbar}{m} \left( \frac{2\pi\hbar}{n^2\omega\Omega} \right)^{1/2} \left( N + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^{1/2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{k}_{\parallel} \delta_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}}, \quad (3.88)$$

где  $N$  — число фотонов в объеме  $\Omega$ ; знаки «+» и «-» соответствуют испусканию и поглощению фотона.

Вообще говоря, фононный спектр в квантовых ямах и в объемном полупроводнике различен (см. п. 2.5). Однако в настоящем разделе мы для простоты будем считать, что двумерные электроны взаимодействуют с обычными трехмерными фононами, характеризуемыми волновым вектором  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{\parallel}, q_z)$  и энергией  $\hbar\omega_0$ . Потенциал, создаваемый длинноволновыми оптическими фононами, имеет вид [22]

$$\varphi = -i \frac{4\pi e_c^*}{\Omega_0 \sqrt{N_0}} \frac{M_1 + M_2}{\sqrt{M_1 M_2}} \sum_{\mathbf{q}, s} \frac{\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{q}}{q^2} (a_{\mathbf{q}s} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} + a_{\mathbf{q}s}^* e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}), \quad (3.89)$$

где  $e_c^*$  — эффективный заряд иона;  $N_0 = \Omega/\Omega_0$  — число элементарных ячеек;  $M_1, M_2$  — массы ионов;  $\mathbf{i}_s$  — единичный вектор, определяющий поляризацию волны; коэффициенты  $a_{\mathbf{q}s}, a_{\mathbf{q}s}^*$  определяют амплитуды колебаний типа  $s$  (продольных или поперечных) с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Из (3.89) видно, что поляризационный потенциал создается только продольной волной и электроны рассеиваются только на продольных оптических колебаниях решетки. Матричный элемент оператора взаимодействия электрона с колебаниями решетки  $H_{\pm}^s = \langle \mathbf{k}'_{\parallel} | e\varphi | \mathbf{k}_{\parallel} \rangle$ , построенный на волновых функциях (3.6), может быть рассчитан по схеме, аналогичной той, которая была использована при выводе формулы (3.9), т. е. путем разбиения объема интегрирования на элементарные ячейки и использования свойств блоховских осциллирующих сомножителей  $u(\mathbf{r})$ :

$$H_{\pm}^s = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0 e^2}{\Omega(q_z^2 + q_{\parallel}^2)}} \left( \varepsilon_{\infty}^{-1} - \varepsilon_0^{-1} \right)^{1/2} \times \\ \times \sqrt{N_q + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{k}'_{\parallel}, \mathbf{k}_{\parallel} \pm \mathbf{q}_{\parallel}}} J_{v', v}(q_z). \quad (3.90)$$

Здесь  $N_q$  — число заполнения фононов:

$$N_q = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_0/k_B T) - 1}, \quad (3.91)$$

$\varepsilon_{\infty}$  и  $\varepsilon_0$  — высокочастотная и статическая диэлектрические проницаемости. Интеграл  $J_{v', v}(q_z)$  определяется степенью перекрытия волновых функций начального и конечного состояний

$$J_{v', v}(q_z) = \int \varphi_{v'}(z) e^{\mp i q_z z} \varphi_v(z) dz. \quad (3.92)$$

Выражение (3.90) описывает не только внутриподзонное рассеяние ( $\nu = \nu'$ ), оно справедливо также и в общем случае рассеяния электрона с переходом между подзонами ( $\nu \neq \nu'$ ). Для рассеяния электрона в пределах первой зоны размерного квантования, в случае ямы с бесконечно высокими стенками имеем

$$J_{1,1}(q_z) = J(q_z) = \frac{2}{a} \int \sin^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) e^{\mp i q_z z} dz. \quad (3.93)$$

При расчете коэффициента поглощения света нужно учесть как испускание, так и поглощение фонона. Выражение (3.87) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{\pm}^{\text{abs, em}} = & \sum_f \sum_i \frac{2\pi}{\hbar} \frac{2\pi\hbar}{\omega \Omega \epsilon_{\infty}} \frac{e^2 \hbar^2}{m^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{q}_{\parallel})^2 \times \\ & \times \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \frac{2\pi\hbar\omega_0 e^2}{\Omega(q_z^2 + q_{\parallel}^2)} (\epsilon_{\infty}^{-1} - \epsilon_0^{-1}) \left| \frac{2}{a} \int \sin^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) e^{\mp i q_z z} dz \right|^2 \times \\ & \times \left( N_q + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) f_{\mathbf{k}_{\parallel}} (1 - f_{\mathbf{k}'_{\parallel}}) \delta(\tilde{E}_f - \tilde{E}_i). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Верхний знак (плюс или минус) в формулах (3.90), (3.92—3.94) соответствует испусканию, а нижний — поглощению фонона.

Перейдем в (3.94) от суммирования к интегрированию, используя закон сохранения продольного квазиимпульса  $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} \pm \mathbf{q}_{\parallel}$ , по следующим правилам (двойка под знаком интеграла необходима, чтобы учесть две возможные проекции спина электрона в одном состоянии  $\mathbf{k}_{\parallel}$ ):

$$\sum_i \rightarrow 2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \rightarrow \int \frac{2S d\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2}; \quad (3.95)$$

$$\sum_f \rightarrow \sum_{\mathbf{k}'_{\parallel}} \rightarrow \int \frac{\Omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int dq_z \int d\mathbf{q}_{\parallel}.$$

В результате получаем, что вероятность процесса поглощения или испускания фотона с участием фонона определяется следующим выражением:

$$W_{\pm}^{\text{abs,em}} = \frac{e^4 \hbar \omega_0}{2 \pi \omega^3 m^2} \frac{\varepsilon_{\infty}^{-1} - \varepsilon_0^{-1}}{\varepsilon_{\infty}} \left( N_q + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \int d\mathbf{k}_{\parallel} \times$$

$$\times \int d\mathbf{q}_{\parallel} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{q}_{\parallel})^2 \int dq_z \frac{1}{(q_z^2 + q_{\parallel}^2)^2} \times$$

$$\times \left| \frac{2}{a} \int \sin^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) e^{\mp i q_z z} dz \right|^2 f_{\mathbf{k}_{\parallel}} (1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}}) \delta(\tilde{E}_f - \tilde{E}_i), \quad (3.96)$$

где для процессов с поглощением фотона  $\tilde{E}_f - \tilde{E}_i = E_f - E_i - \hbar\omega \mp \hbar\omega_0$ , а для процессов с испусканием фотона  $\tilde{E}_f - \tilde{E}_i = E_f - E_i + \hbar\omega \mp \hbar\omega_0$ . Пределы интегрирования в (3.96) также имеют четыре варианта значений в зависимости от характера процесса.

В итоге с помощью (3.86) коэффициент внутризонного поглощения света при рассеянии на полярных оптических фононах можем представить в виде:

$$\alpha(\omega) = \frac{n}{c} \left( W_+^{\text{abs}} + W_-^{\text{abs}} - W_+^{\text{em}} - W_-^{\text{em}} \right), \quad (3.97)$$

где фигурирующие в правой части вероятности описываются формулой (3.96).

Как уже упоминалось, для более точного количественного описания необходимо учесть дополнительные механизмы рассеяния: на ионизованных примесях и шероховатостях границ. Внутриподзонное поглощение является двумерным аналогом обычного поглощения Друде в объемных полупроводниках. Хорошо известно, что в классическом пределе ( $\hbar\omega \ll k_B T$ ) коэффициент внутризонного поглощения пропорционален  $\lambda^2$  ( $\lambda$  — длина волны света), т. е. поглощение этого типа особенно заметно при больших длинах волн. Это справедливо и для внутриподзонного поглощения. На рис. 23 приведен результат расчета внутриподзонного коэффициента поглощения для конкретной структуры на длине волны  $\lambda = 100$  мкм. В расчете учитывалось поглощение света с испусканием оптических фононов и с рассеянием на примесях и несовершенствах интерфейсов; на рисунке показан вклад каждого из указанных механизмов.

При низких температурах число оптических фононов в кристалле экспоненциально мало (например, в GaAs энергия оптического фонона  $\hbar\omega_0$  равна 36 мэВ, что соответствует темпера-

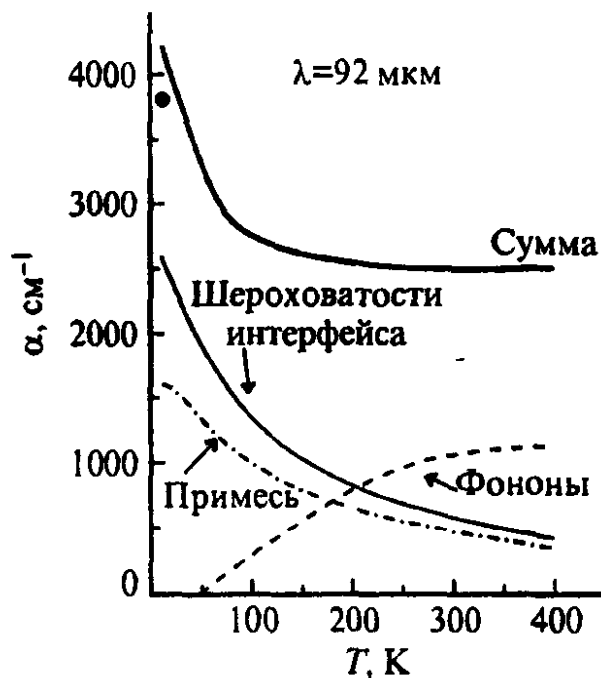


Рис. 23. Вклад различных механизмов рассеяния электронов во внутриподзонное поглощение при нормальном падении света для квантовой ямы GaAs/Al<sub>0.22</sub>Ga<sub>0.78</sub>As шириной 6 нм и концентрацией двумерных электронов  $3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ .

Нормировочной длиной  $L$  является период структуры 20 нм. Приведено экспериментальное значение коэффициента поглощения, измеренное при  $T = 4.2 \text{ К}$  в структуре, состоящей из 150 таких квантовых ям.

туре 430 К). Таким образом, в поглощение дают вклад лишь процессы с испусканием оптического фонона.

Отметим интересную особенность: поскольку энергия фотона для случая, показанного на рис. 23,  $\hbar\omega = 13 \text{ мэВ} < \hbar\omega_0$ , реальный переход электрона сопровождается уменьшением его энергии:  $E_f = E_0 + \hbar\omega - \hbar\omega_0$ . Поскольку электронный газ при низких температурах вырожден, состояния, находящиеся выше уровня Ферми, свободны, а находящиеся ниже — заполнены. Таким образом, поглощение с участием фононов должно отсутствовать. Действительно, при низких температурах поглощение определяется в основном рассеянием на примесях и несовершенствах интерфейса и падает с ростом температуры. При дальнейшем увеличении температуры резкий край распределения Ферми размывается и становятся возможными оптические переходы с участием фононов, которые и начинают доминировать при температуре порядка 200 К. При этом также растет и число заполнения фононов  $N_q$ , что приводит к увеличению интенсивности переходов с поглощением фононов и дополнительному росту поглощения. Следует обратить внимание на большие значения коэффициента поглощения, сравнимые с величинами, наблюдающимися при межподзонном поглощении.

На рис. 24 приведен рассчитанный спектр внутриподзонного поглощения излучения дальнего инфракрасного диапазона в

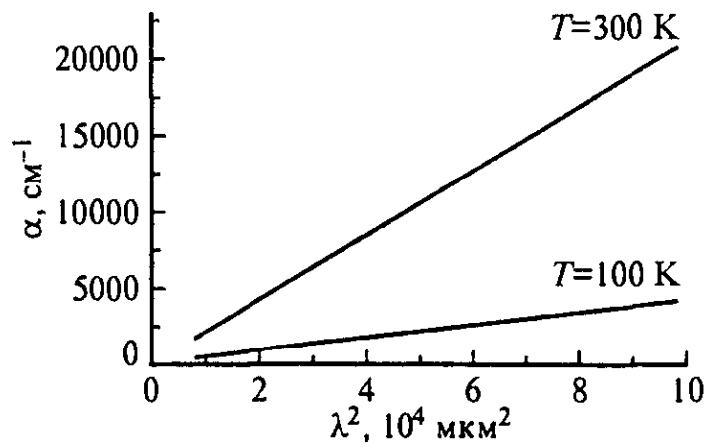


Рис. 24. Спектры внутриподзонного поглощения в квантовой яме при рассеянии электрона на оптических колебаниях решетки для двух температур. Параметры структуры те же, что на рис. 18. Нормировочной длиной  $L$  является ширина квантовой ямы 6 нм.

квантовой яме при рассеянии на оптических фононах. Видно, что спектр хорошо аппроксимируется классической зависимостью для поглощения Друдэ:  $\alpha(\lambda) \propto \lambda^2$ .

### 3.3. Оптические переходы между минизонами в сверхрешетках

Рассмотрим особенности оптических переходов носителей заряда в сверхрешетках (п. 1.1, рис. 4), связанные с наличием в них минизон (см. п. 2.5). Зависимость энергии от  $k_z$ , соответствующего распространению волны вдоль оси сверхрешетки  $z$ , дается дисперсионным соотношением (2.44).<sup>\*</sup> Запишем соотношение (2.44) в виде  $\cos k_z d = F(E)$ . Если  $E_{n0}$  — энергия, соответствующая  $n$ -му уровню изолированной квантовой ямы, то вблизи этого значения энергии  $\cos k_z d$  можно разложить в ряд Тейлора с точностью до линейных по  $(E_n - E_{n0})$  членов [1]:

$$\cos k_z d \approx F(E_{n0}) + F'(E_{n0})(E_n - E_{n0}). \quad (3.98)$$

Это так называемое приближение сильной связи (*tight-binding*), которое справедливо для сверхрешеток с достаточно высокими барьерами. Отсюда  $E_n = E_{n0} - 1/F'(F - \cos k_z d)$ , что можно записать, учитывая также и параболический закон дисперсии в плоскости слоев, в виде [23]:

$$E_n(\mathbf{k}) = E_n(k_z) + E_{\parallel} = E_n^0 + \frac{\Delta_n}{2}(1 \pm \cos k_z d) + \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m}. \quad (3.99)$$

<sup>\*</sup> Выше, в п. 2.5, вместо  $k_z$  использовалось обозначение  $K$ .



Знак минус соответствует нечетным минизонам, а плюс — четным. Величина  $\Delta_n$  соответствует энергетической ширине  $n$ -й минизоны,  $E_n^0$  — дно этой минизоны.

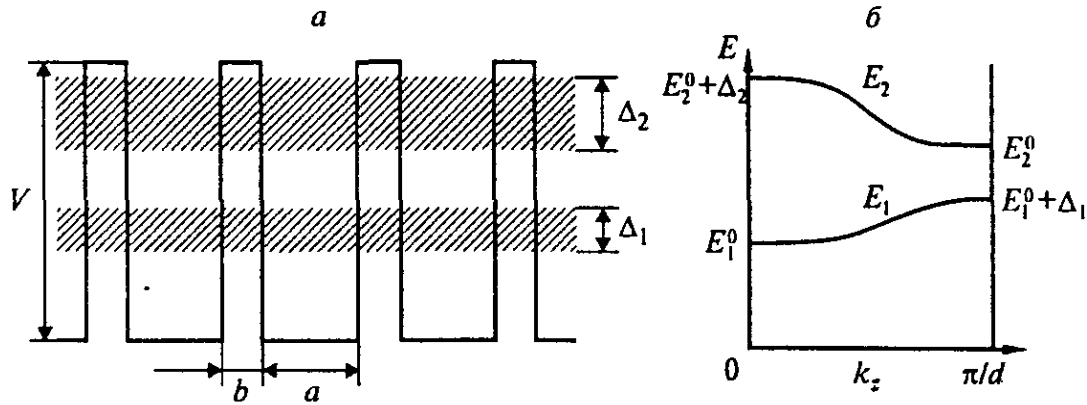


Рис. 25. Минизоны в сверхрешетке в реальном пространстве (а) и в  $k$ -пространстве вдоль направления  $k_z$  (б).

$OZ$  — направление вдоль оси роста структуры.

На рис. 25 схематично приведена зонная структура сверхрешетки с двумя минизонами: в реальном пространстве и в  $k$ -пространстве вдоль направления  $k_z$ . Из рисунка видно, что энергетическое расстояние между минизонами в импульсном пространстве вдоль  $k_z$  меняется. По этой причине спектр оптического поглощения сверхрешеток при межминизонных переходах качественно отличается от спектра межподзонного поглощения в квантовых ямах. Последние можно рассматривать как сверхрешетки с предельно узкими минизонами, в которых дисперсия  $E_n$  отсутствует.

По этой причине спектр оптического поглощения сверхрешеток при переходах электронов из первой минизоны во вторую описывается выражением, аналогичным (3.23), но в дополнение к суммированию по квантовым числам  $k_{||}$  и  $k'_{||}$ , характеризующим движение электрона в плоскости квантово-размерных слоев в начальном и конечном состояниях, необходимо добавить суммирование по квантовому числу, характеризующему движение в перпендикулярном направлении (в начальном и конечном состояниях соответственно  $k_z$  и  $k'_z$ ):

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{n_b c S d \omega m^2} \sum_{k'_{||}, k'_z} \sum_{k_{||}, k_z} |e_z \delta_{k'_{||}, k_{||}} \delta_{k'_z, k_z} \langle \varphi_2 | \hat{p}_z | \varphi_1 \rangle|^2 \times \\ \times [f(E_i) - f(E_f)] \delta(E_f - E_i - \hbar\omega), \quad (3.100)$$

где  $d = (a + b)$  — период сверхрешетки;  $E_i = E_1(k_z) + \hbar^2 k_{||}^2 / 2m$ ;  $E_f = E_2(k'_z) + \hbar^2 k_{||}^2 / 2m$ .

Произведем суммирование по  $k'_\parallel$  и  $k'_z$ , а затем перейдем от суммирования по  $k_\parallel$  и  $k_z$  к интегрированию:

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2 e_z^2}{n_b c S d \omega m^2} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \frac{d}{2\pi} dk_z \left| \langle \varphi_2 | \hat{p}_z | \varphi_1 \rangle \right|^2 \times \\ \times \delta(E_2(k_z) - E_1(k_z) - \hbar\omega) \int \frac{2S}{(2\pi)^2} d\mathbf{k}_\parallel \times \\ \times \left[ f\left(E_1(k_z) + \frac{\hbar^2 k_\parallel^2}{2m}\right) - f\left(E_2(k_z) + \frac{\hbar^2 k_\parallel^2}{2m}\right) \right]. \quad (3.101)$$

Заменяем интегрирование по  $d\mathbf{k}_\parallel = k_\parallel dk_\parallel d\varphi$  интегрированием по  $dE_\parallel d\varphi$ , где  $E_\parallel = \hbar^2 k_\parallel^2 / 2m$ . Тогда

$$\int \frac{2}{(2\pi)^2} d\mathbf{k}_\parallel [f(E_1(k_z) + E_\parallel) - f(E_2(k_z) + E_\parallel)] = \\ = \frac{2}{(2\pi)^2} 2\pi \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty dE_\parallel [f(E_1(k_z) + E_\parallel) - f(E_2(k_z) + E_\parallel)] = \\ = \frac{m}{\pi \hbar^2} k_B T \ln \frac{1 + \exp\left[\frac{E_F - E_1(k_z)}{k_B T}\right]}{1 + \exp\left[\frac{E_F - E_2(k_z)}{k_B T}\right]}, \quad (3.102)$$

где при вычислении интеграла был использован явный вид функции распределения Ферми—Дирака:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}. \quad (3.103)$$

Подставляя (3.102) в (3.101), получаем окончательно спектральную зависимость коэффициента поглощения:

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{4e^2 e_z^2 k_B T}{n_b c m \omega \hbar^2} \int_0^{\pi/d} dk_z \left| \langle \varphi_2 | \hat{p}_z | \varphi_1 \rangle \right|^2 \times$$

$$\times \ln \left( \frac{1 + \exp [(E_F - E_1(k_z))/k_B T]}{1 + \exp [(E_F - E_2(k_z))/k_B T]} \right) \delta(E_2(k_z) - E_1(k_z) - \hbar\omega). \quad (3.304)$$

Если феноменологически учесть спектральное уширение, которое всегда имеет место на практике, подобно тому как это было сделано для межподзонных переходов в квантовых ямах в (3.26), то в (3.104) следует заменить  $\delta$ -функцию лоренцианом:

$$\frac{\Gamma/\pi}{[E_2(k_z) - E_1(k_z) - \hbar\omega]^2 + \Gamma^2}. \quad (3.105)$$

На рис. 26 показаны результаты расчета поглощения для сверхрешетки, у которой первая минизона полностью заполнена, а вторая полностью пуста. В отличие от межподзонного поглощения в квантовых ямах, для которых обычно характерна узкая резонансная линия шириной в единицы миллиэлектрон-вольт, здесь мы наблюдаем целую полосу поглощения шириной около 100 мэВ. Ширина полосы определяется суммарной энергетической шириной первой и второй минизон:  $\Delta_1 + \Delta_2$  (см. рис. 25).

Заметим, что расчеты с помощью формулы (3.104) довольно трудоемки, так как явный вид волновых функций  $\phi_1$  и  $\phi_2$  довольно громоздкий (см., например, [2]). В то же время основные особенности спектра поглощения могут быть получены путем

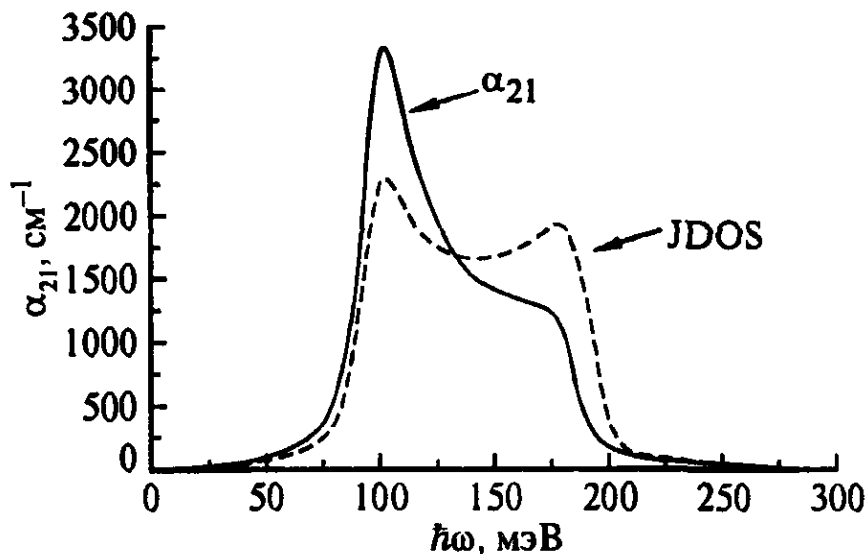


Рис. 26. Коэффициент поглощения (сплошная кривая) для сверхрешетки с  $a = 75 \text{ \AA}$  и  $b = 25 \text{ \AA}$ .

Остальные параметры:  $\Gamma = 10 \text{ мэВ}$ ,  $T = 5 \text{ К}$ ,  $N_s = 6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Первая минизона заполнена полностью, вторая минизона пуста. Для сравнения показана приведенная плотность состояний (штриховая кривая) в произвольных единицах [23].

более простого расчета приведенной плотности состояний (*joint density of states*, JDOS) [24]:

$$\rho(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \delta(E_2(\mathbf{k}) - E_1(\mathbf{k}) - \hbar\omega) d\mathbf{k}, \quad (3.106)$$

где  $E_i(\mathbf{k})$  определяется выражением (3.99).

Очевидно, что, рассчитав  $\rho(\omega)$ , мы будем тем самым иметь спектр  $\alpha_{21}(\omega)$ , только без учета двух весовых множителей: матричного элемента оператора импульса и степени заполнения обеих минизон (см. (3.100) и (3.104)).

Учитывая свойство  $\delta$ -функции:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|df/dx|_{x=x_i}}, \quad (3.107)$$

где  $x_i$  — корни уравнения  $f(x_i) = 0$ , можно получить:

$$\begin{aligned} \rho(\omega) = \\ = \frac{2}{(2\pi)^3} \int dk_x dk_y \int \sum_{k_z^\omega} \delta(k_z - k_z^\omega) \left| \frac{\partial[E_2(k_z) - E_1(k_z)]}{\partial k_z} \right|^{-1} dk_z, \end{aligned} \quad (3.108)$$

где  $k_z^\omega$  — корни уравнения  $E_2(k_z) - E_1(k_z) - \hbar\omega = 0$ . При интегрировании в (3.108) по  $k_x$  и  $k_y$  останется лишь величина  $(2\pi)^2/S$ , где  $S$  — площадь образца ( $k_x$  меняется лишь от  $-\pi/l_x$  до  $\pi/l_x$ , а  $k_y$  — от  $-\pi/l_y$  до  $\pi/l_y$ , где  $l_x$  и  $l_y$  — линейные размеры образца,  $S = l_x l_y$ ). Учет  $\delta$ -функции при интегрировании по  $k_z$  дает

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\pi S} \sum_{k_z^\omega} \left| \frac{\partial[E_f(k_z) - E_i(k_z)]}{\partial k_z} \right|^{-1}_{k_z=k_z^\omega}. \quad (3.109)$$

Точки  $k_z^\omega$ , в которых плотность состояний становится бесконечной, а зоны параллельны, называются *точками сингулярностей* Ван Хова (van Hove).

Получим выражение для производной

$$\frac{\partial[E_2(k_z) - E_1(k_z)]}{\partial k_z} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\Delta_2 d}{2}(-\sin k_z d) - \frac{\Delta_1 d}{2}(-\sin k_z d) = \\
&= \left( \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{2} \right) d \sqrt{1 - \cos^2 k_z d}.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Подставив в (3.110) выражение для  $\cos k_z d$  из (3.99) с учетом равенства аргумента  $\delta$ -функции нулю, найдем:

$$\cos k_z d = \frac{\hbar\omega - E_2^0 + E_1^0 - \Delta_2/2 + \Delta_1/2}{\Delta_2/2 + \Delta_1/2}. \tag{3.111}$$

Тогда приведенную плотность состояний можно записать как

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\pi d S} \left[ \left( \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{2} \right)^2 - \left( \hbar\omega - E_2^0 + E_1^0 - \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\Delta_1}{2} \right)^2 \right]^{-1/2}. \tag{3.112}$$

Полученная приведенная плотность состояний имеет две сингулярности: при  $\hbar\omega = (E_2^0 + \Delta_2) - E_1^0$ , что соответствует краю минизоны при  $k_z = 0$  (см. рис. 25), а также при  $\hbar\omega = E_2^0 - (E_1^0 + \Delta_1)$ , что соответствует другому краю минизоны (при  $k_z = \pi/d$ ).

Чтобы избавиться от сингулярности, в приведенных расчетах можно феноменологически заменить  $\delta(E_2(k_z) - E_1(k_z) - \hbar\omega)$  лоренцианом (3.105). Тогда  $\rho(\omega)$  будет иметь пики конечной высоты при энергиях квантов, соответствующих краям минизоны.

Результаты расчета приведенной плотности состояний представлены на рис. 26. Видно, что спектральный ход коэффициента поглощения заметно отличается от кривой  $\rho(\omega)$ . Главное различие — это существенное доминирование низкочастотного пика в спектре поглощения над высокочастотным (у кривой  $\rho(\omega)$  оба пика почти симметричны).\*

Оказывается, что эту главную особенность спектра поглощения можно объяснить, не прибегая к скрупулезным расчетам матричного элемента оператора импульса, входящего в (3.101).

---

\* Строго говоря, в использованном нами здесь приближении сильной связи пики  $\rho(\omega)$  должны быть абсолютно симметричны. В работе [23], рисунок из которой мы приводим, реализован более точный расчет на основе модели Кроинга—Пенни, дающий слабую асимметрию пиков  $\rho(\omega)$ .

Достаточно выразить его через силу осциллятора с помощью формулы (3.19):

$$\left| \langle \varphi_2 | \hat{p}_z | \varphi_1 \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} m [E_2(k_z) - E_1(k_z)] f_{21}(k_z), \quad (3.113)$$

а затем использовать известное правило сумм для сил осцилляторов, которое для электрона в периодическом потенциале имеет следующий вид [25]:

$$\sum_{j \neq i} f_{ji}(k_z) + \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_i(k_z)}{\partial k_z^2} = 1. \quad (3.114)$$

Отметим, что первое слагаемое в левой части (3.114) описывает переходы из  $i$ -й минизоны во все остальные, а второе слагаемое соответствует внутриминизонным переходам.

Ориентируясь на оценки сил осцилляторов для квантовых ям, мы можем положить, что

$$f_{21}(k_z) \approx \sum_{j \neq 1} f_{ji}(k_z), \quad (3.115)$$

и тогда, согласно (3.114),

$$f_{21}(k_z) \approx 1 - \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_1(k_z)}{\partial k_z^2}. \quad (3.116)$$

В чем же физический смысл выражения (3.116)? Схема возможных переходов электронов между двумя нижними минизонами изображена на рис. 27. Вторая производная от энергии по волновому вектору характеризует кривизну минизоны. На дне первой минизоны (в точке  $k_z = 0$ ) эта производная положительна, что уменьшает силу осциллятора по сравнению с единицей (рис. 27, а). Напротив, вблизи потолка минизоны ( $k_z = \pi/d$ ) указанная производная отрицательна и сила осциллятора становится больше единицы (рис. 27, б). Это делает межминизонный переход более вероятным для электронов вблизи потолка первой минизоны, и соответствующий этим переходам низкочастотный пик полосы поглощения доминирует над высокочастотным.

Зависимость силы осциллятора межминизонного перехода  $f_{21}$  от волнового вектора  $k_z$  для сверхрешеток с параметрами:  $a = 75 \text{ \AA}$  и  $b = 15, 25$  и  $40 \text{ \AA}$  — и с соответствующими ширинами минизоны  $\Delta_1 = 36, 18$  и  $7 \text{ мэВ}$  показана на рис. 28. Для сравнения там же показана сила осциллятора для квантовой ямы с бес-

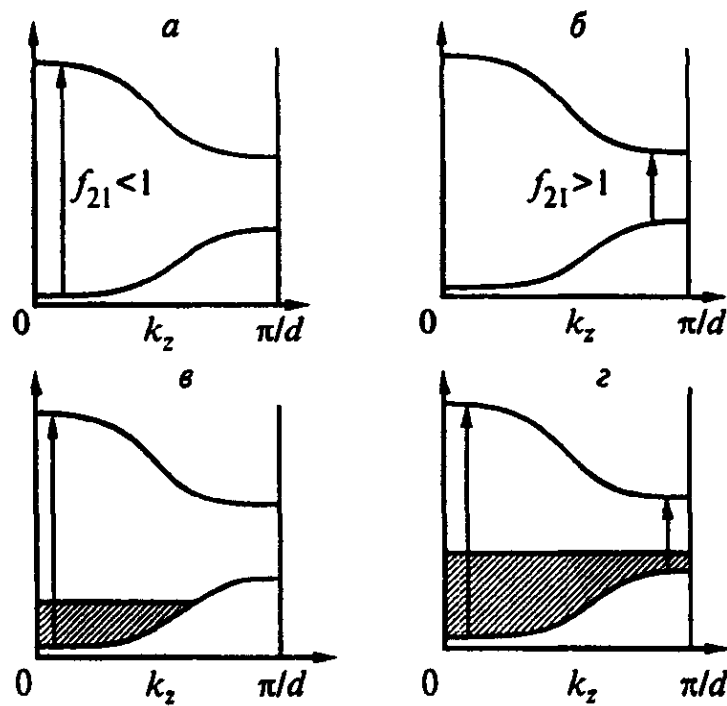


Рис. 27. Схема межминизонных переходов.

*Вверху:* переходы электрона со дна (а) и с потолка (б) первой минизоны; *внизу:* возможные переходы из частично (в) и полностью (з) заполненной минизоны.

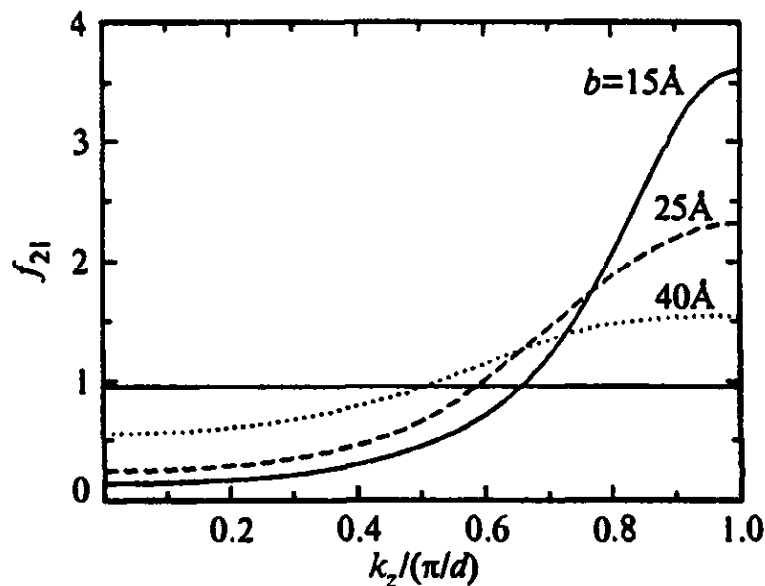


Рис. 28. Зависимость силы осциллятора  $f_{21}$  от  $k_z$  для сверхрешеток с различной шириной барьера [23].

Сила осциллятора для бесконечно глубокой ямы представлена горизонтальной линией.

конечно высоким барьером  $f_{21} = 0.96$ . Видно, что чем шире минизона, тем больше сила осциллятора на ее краю. При этом среднее значение силы осциллятора остается порядка единицы практически для любой минизоны.

На рис. 29 приведены экспериментальные спектры поглощения в структуре со сверхрешеткой ( $a/b = 75 \text{ Å}/25 \text{ Å}$ ) при различ-

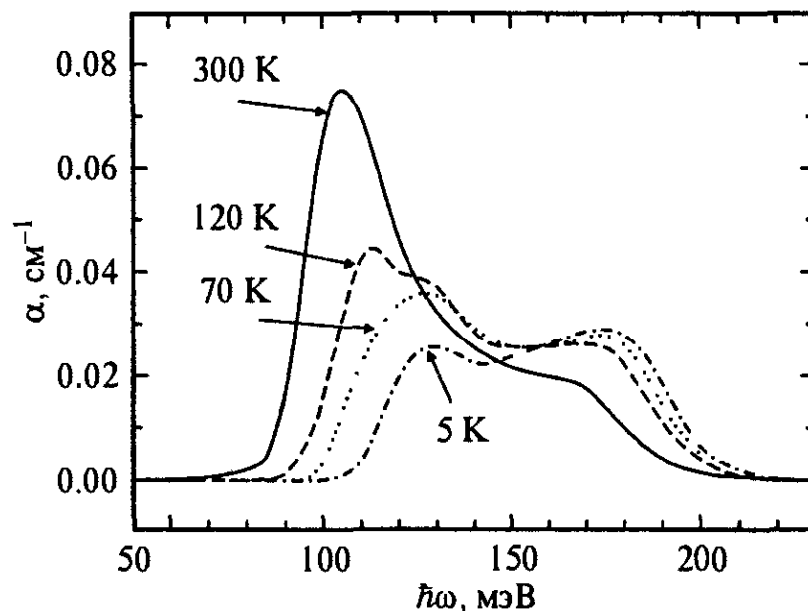


Рис. 29. Спектральная зависимость коэффициента поглощения в слабодопированной ( $6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ) сверхрешетке с параметрами:  $a = 75 \text{ \AA}$  и  $b = 25 \text{ \AA}$  при различных температурах [23].

ных температурах решетки. При очень низких температурах нижняя минизона заполнена лишь наполовину (рис. 27, в) и поглощение света с малой энергией кванта невелико из-за малой населенности минизоны на краю. Поглощение света происходит лишь при переходах электронов, находящихся на дне минизоны (поглощается квант с энергией около 180 мэВ). Второй пик поглощения, в районе энергий вблизи 130 мэВ, обусловлен в данной структуре переходами электронов с донорного уровня в зону проводимости. С ростом температуры заселенность края минизоны увеличивается и поглощение в этой области спектра (вблизи энергии  $\hbar\omega \approx 110$  мэВ) возрастает, а вклад переходов с донорных уровней уменьшается из-за их опустошения. При высоких температурах, когда минизона заполнена полностью (рис. 27, г), а донорные уровни почти полностью ионизованы, поглощение, вызванное переходами электронов на краю минизоны (при  $k_z = \pi/d$ ), преобладает из-за большей силы осциллятора.

### 3.4. Межзонные оптические переходы в квантовых ямах

Рассмотрим, как размерное квантование влияет на собственное поглощение света, связанное с переходами двумерных электронов из валентной зоны в зону проводимости. Эти переходы показаны на рис. 6 стрелками 4 и 5. Первые заключения об осо-



бенностях межзонного поглощения в квантовых ямах могут быть сделаны уже на основе этой схемы. Во-первых, край межзонного поглощения  $\hbar\omega_{th}$  сдвинется по сравнению с краем поглощения в объемном материале в коротковолновую сторону на энергию размерного квантования электронов и дырок:

$$\hbar\omega_{th} = E_g + E_{el} + E_{hl}. \quad (3.117)$$

Во-вторых, расщепление зоны проводимости и валентной зоны на ряд подзон размерного квантования означает, что в спектре поглощения будут присутствовать особенности, связанные с переходами электронов между различными подзонами.

Рассмотрим теперь межзонное поглощение более подробно. Согласно (3.9), коэффициент поглощения (3.2) при межзонных переходах определяется следующим матричным элементом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{fi} &= \langle u_{n_f} | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n_i} \rangle \int_{\Omega} \psi_f^* \psi_i d\mathbf{r} = \\ &= \langle u_{n_f} | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n_i} \rangle \frac{1}{S} \int_{\Omega} \varphi_{ev'}^*(z) e^{-i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \varphi_{hv}(z) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} d\mathbf{r} = \\ &= \langle u_{n_f} | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n_i} \rangle \delta_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \int \varphi_{ev'}^*(z) \varphi_{hv}(z) dz. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Как при любых оптических переходах в структурах с трансляционной симметрией, при межзонном поглощении сохраняется двумерный волновой вектор  $\mathbf{k}_{\parallel}$  (полагаем по-прежнему, что волновой вектор света мал). Таким образом, оптические переходы 4 и 5 на рис. 6 действительно следует изображать вертикальными стрелками.

Ограничимся сначала рассмотрением межзонного поглощения в квантовых ямах с простой зонной структурой. Будем считать состояния валентной зоны полностью заполненными, а состояния зоны проводимости — пустыми. Тогда выражение для коэффициента поглощения (3.2) может быть записано следующим образом:

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{n c m_0^2 \omega \Omega} \sum_{i,f} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{fi}|^2 \delta(E_{ev'} - E_{hv} - \hbar\omega), \quad (3.119)$$

где в качестве  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{fi}$  следует подставить выражение (3.118). Переходим в (3.119) от суммирования к интегрированию (см. (3.95)), учитывая условие вертикальности переходов  $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel}$ :

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{ncm_0^2 \omega} \left| \langle u_{n_f} | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n_i} \rangle \right|^2 \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi^2 (a+b)} \sum_{v, v'} \left[ \int \varphi_{ev'}^*(z) \varphi_{hv}(z) dz \right]^2 \times$$

$$\times \int dk_{\parallel} \delta \left[ E_{ev'}(k_{\parallel}) - E_{hv}(k_{\parallel}) - \hbar\omega \right], \quad (3.120)$$

где  $(a+b)$  — период структуры.

Для случая параболических подзон

$$E_{ev'}(k_{\parallel}) = E_{ev'}^0 + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_e}, \quad E_{hv}(k_{\parallel}) = E_{hv}^0 - \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_h} \quad (3.121)$$

величина волнового вектора, соответствующего вертикальным переходам между подзонами валентной зоны и зоны проводимости, равна

$$k_{\parallel} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_{eh}(\hbar\omega - E_{ev'}^0 + E_{hv}^0)}. \quad (3.122)$$

Здесь  $m_e$  и  $m_h$  — эффективные массы электрона и дырки;  $m_{eh}$  — приведенная масса. Переходы возможны только при  $\hbar\omega > E_{ev'}^0 - E_{hv}^0$ . После интегрирования в (3.120) получаем:

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{ncm_0^2 \omega} \left| \langle u_{n_f} | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{n_i} \rangle \right|^2 \times$$

$$\times \frac{1}{(a+b)} \sum_{v, v'} \left[ \int \varphi_{ev'}^*(z) \varphi_{hv}(z) dz \right]^2 \frac{m_{eh}}{\pi \hbar^2} \Theta \left( \hbar\omega - E_{ev'}^0 + E_{hv}^0 \right). \quad (3.123)$$

Величина  $\rho_{v, v'}^{\text{opt}} = (m_{eh} / (\pi \hbar^2)) \Theta(\hbar\omega - E_{ev'}^0 + E_{hv}^0)$  является приведенной плотностью состояний, соответствующей переходам между подзонами  $v$  и  $v'$ . Ступенчатая функция  $\Theta(x)$  определяется следующим образом:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.124)$$

Таким образом, коэффициент межзонного поглощения в квантовых ямах представляет собой ступенчатую функцию час-

тоты. Каждая ступень соответствует включению в поглощение переходов от новой пары подзон. Вклад переходов между подзонами  $v$  и  $v'$  в поглощение пропорционален квадрату интеграла перекрытия (см. формулу (3.123)), который определяет правила отбора по номеру подзоны. Рассмотрим квантовую яму с бесконечно высокими стенками. В такой структуре собственные функции не зависят от эффективной массы (см., например, (3.16), (3.17)). Следовательно, наборы собственных функций для электронов и дырок совпадают. В силу ортонормированности каждого из наборов интеграл перекрытия

$$\int \varphi_{ev'}^*(z) \varphi_{hv}(z) dz = \delta_{v,v'}. \quad (3.125)$$

Итак, оптические переходы могут происходить только между подзонами валентной зоны и зоны проводимости с одинаковыми номерами. В квантовых ямах конечной глубины волновые функции зависят от эффективных масс и других параметров структуры. Таким образом, наборы волновых функций для электронов и дырок не совпадают и ортогональность волновых функций отсутствует. Тем не менее выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \int \varphi_{ev'}^*(z) \varphi_{hv}(z) dz &\approx 1, \quad v = v'; \\ \left| \int \varphi_{ev'}^*(z) \varphi_{hv}(z) dz \right| &\ll 1, \quad v \neq v', \end{aligned} \quad (3.126)$$

означающие, что вероятность переходов по-прежнему будет мала при  $v \neq v'$ .

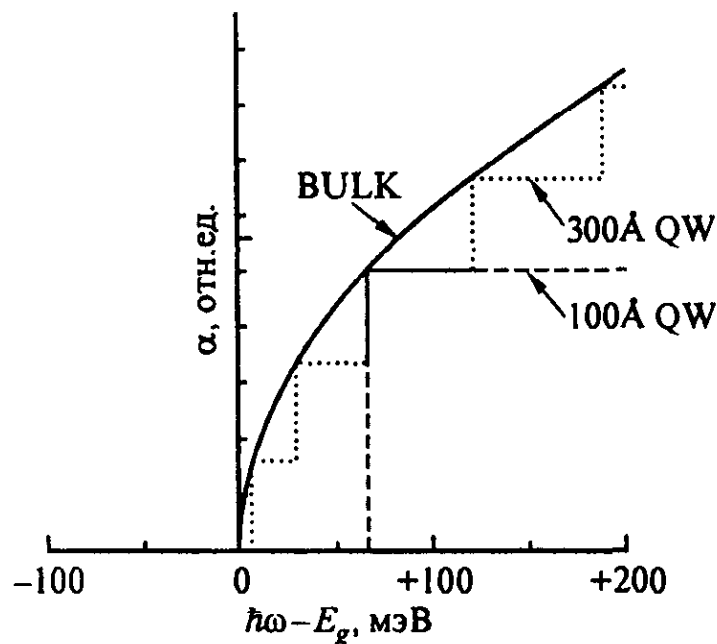


Рис. 30. Коэффициент межзонного поглощения в бесконечно глубоких квантовых ямах GaAs различной толщины (100 и 300 Å).

Для сравнения приведен коэффициент поглощения объемного материала

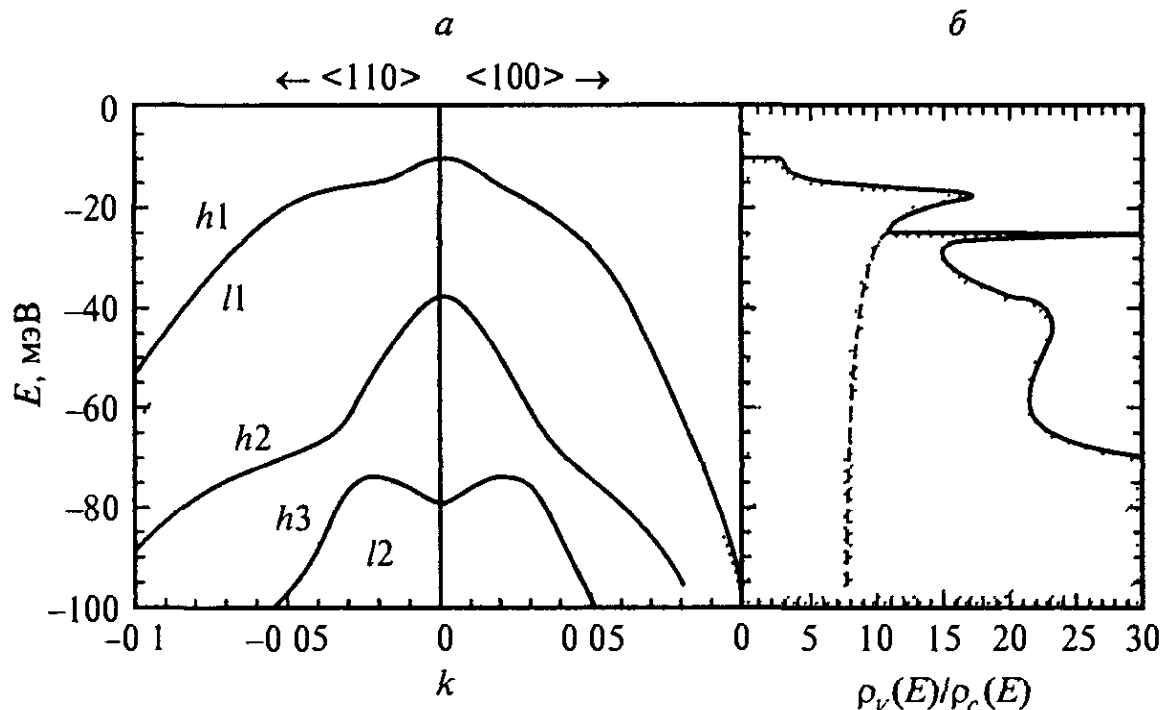


Рис 31 Энергетическая диаграмма подзон валентной зоны (а) и плотность состояний в валентной зоне (б) для квантовой ямы GaAs/Al<sub>0.2</sub>Ga<sub>0.8</sub>As шириной 80 Å для двух направлений в плоскости структуры (110) и (100)

Штриховая линия на рис б показывает вклад подзоны тяжелых дырок h1 [26]

Зависимость коэффициента поглощения от поляризации света определяется фактором  $\left| \langle u_{nf} | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{p}} | u_{ni} \rangle \right|^2$  в формуле (3.123). Для простой зонной структуры в кубических кристаллах такая зависимость отсутствует. На рис. 30 схематически представлен вид коэффициента межзонного поглощения для квантовых ям различной ширины.

Мы рассмотрели межзонное поглощение света в квантовых ямах с простой структурой валентной зоны и зоны проводимости. В действительности при изучении поглощения в гетероструктурах, основанных на соединениях  $A_3B_5$ , необходимо учитывать сложную структуру валентной зоны, которая анализировалась в п. 2.3.

Энергии подзон валентной зоны являются сложными функциями волнового вектора и зависят от ориентации квантово-размерного слоя по отношению к кристаллографическим осям. На рис. 31, а приведена структура подзон валентной зоны для конкретной квантовой ямы GaAs/AlGaAs для двух кристаллографических направлений.

В приближении изотропных зон интеграл в выражении для коэффициента межзонного поглощения (3.120) можно преобразовать к виду

$$\int d\mathbf{k}_{\parallel} \delta [E_{ev'}(\mathbf{k}_{\parallel}) - E_{hv}(\mathbf{k}_{\parallel}) - \hbar\omega] =$$

$$= 2\pi k_{\parallel}' \left\{ \left| \frac{d[E_{ev'}(\mathbf{k}_{\parallel}) - E_{hv}(\mathbf{k}_{\parallel})]}{dk_{\parallel}} \right|_{k_{\parallel}=k_{\parallel}'} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \Theta[\hbar\omega - E_{ev'}^0(k_{\parallel}') + E_{ev}^0(k_{\parallel}')], \quad (3.127)$$

где  $k_{\parallel}'$  — значение модуля волнового вектора, удовлетворяющее закону сохранения энергии при оптическом переходе. Множитель перед  $\Theta$ -функцией в правой части формулы (3.127) пропорционален приведенной плотности состояний  $\rho_{v,v'}^{\text{opt}}$ , имеющей в данном случае сложный вид из-за непараболической зависимости  $E_{hv'}(\mathbf{k}_{\parallel})$ . Таким образом, спектральная зависимость коэффициента межзонного поглощения для сложной валентной зоны, определяемая видом приведенной плотности состояний, будет существенно отличаться от зависимости, изображенной на рис. 30. В спектре будут присутствовать особенности, связанные с особенностями плотности состояний.

Учет сложной структуры валентной зоны приводит к поляризационной зависимости межзонного поглощения в квантовых ямах. Рассмотрим межзонные переходы в гетероструктурах, выращенных на основе полупроводников с решеткой цинковой обманки в направлении [001]. Скорость генерации электронно-дырочных пар (вероятность рождения в единицу времени) для оптических переходов при  $k_x = k_y = 0$  определяется соотношениями:

$$\left| M\left( ev, \pm \frac{1}{2}, hhv, \mp \frac{3}{2} \right) \right|^2 \propto |e_x \pm ie_y|^2,$$

$$\left| M\left( ev, \pm \frac{1}{2}, hhv, \pm \frac{3}{2} \right) \right|^2 = 0,$$

$$\left| M\left( ev, \pm \frac{1}{2}, lhv, \pm \frac{1}{2} \right) \right|^2 \propto \frac{1}{3} |e_x \mp ie_y|^2,$$

$$\left| M\left( ev, \pm \frac{1}{2}, lhv, \mp \frac{1}{2} \right) \right|^2 \propto \frac{4}{3} |e_z|^2.$$

(3.128)

Для вывода можно воспользоваться структурой блоховских функций (2.27) и учесть, что при  $\mathbf{k} = 0$  тяжелая дырка имеет проекцию момента  $\pm 3/2$ , а легкая дырка — проекцию момента  $\pm 1/2$  на направление роста. В (3.128) состояния в валентной зоне ука-

заны в дырочном представлении. В связи с этим заметим, что проекции углового момента в электронном и дырочном представлениях различаются знаком. Для света, циркулярно поляризованного по правому кругу ( $\sigma_+$ -поляризация) и распространяющегося вдоль оси  $z$ , справедливы формулы

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{o}_x + i\mathbf{o}_y}{\sqrt{2}} \text{ и } |e_x + ie_y|^2 = 0, |e_x - ie_y|^2 = 2, e_z = 0,$$

тогда как для света  $\sigma_-$ -поляризации имеем

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{o}_x - i\mathbf{o}_y}{\sqrt{2}} \text{ и } |e_x + ie_y|^2 = 2, |e_x - ie_y|^2 = 0, e_z = 0,$$

где  $\mathbf{o}_x$  и  $\mathbf{o}_y$  — единичные векторы в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Для случая линейной поляризации света удобно проиллюстрировать полученные результаты на диаграмме (рис. 32). Видно, что интенсивности переходов из подзон тяжелых и легких дырок существенно отличаются и, например, край поглощения для света, поляризованного вдоль оси роста ( $\mathbf{e} \parallel OZ$ ), определяется легкими дырками.

Для ненулевого латерального волнового вектора дырки  $\mathbf{k}_\parallel$ , сопоставимого с обратной шириной ямы, состояния тяжелых и легких дырок сильно перемешиваются, валентные подзоны оказываются сильно непараболическими и правила отбора нарушаются.

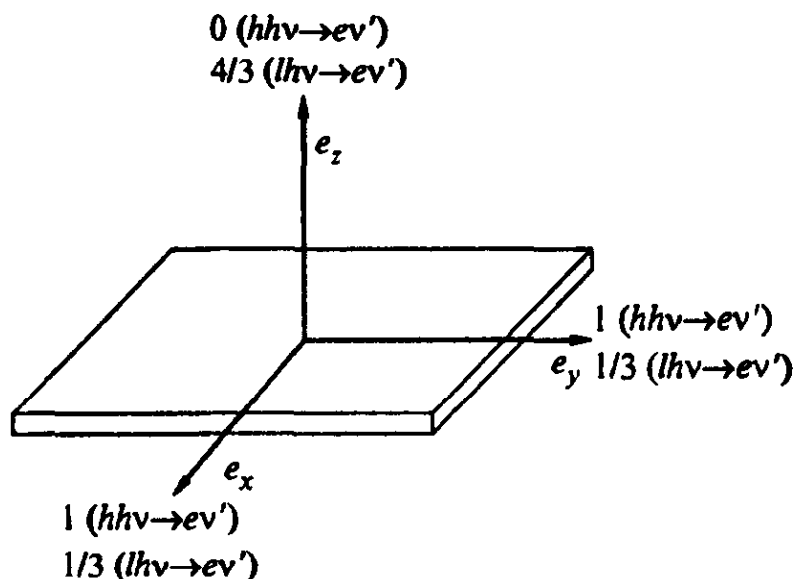


Рис. 32. Относительные интенсивности межзонных переходов электронов для различных поляризаций света ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  — в плоскости квантовой ямы;  $\mathbf{e}_z$  — вдоль оси роста) и для различных типов переходов: из подзон тяжелых  $hh$ - и легких  $lh$ -дырок [26].

В настоящем разделе мы не касались экситонных эффектов, проявляющихся при возбуждении электронно-дырочной пары светом. Между тем, как показано в п. 2.6, энергия связи квазидвумерного экситона превышает боровскую энергию, рассчитанную для объемного материала. Это приводит к тому, что наблюдать экситонные эффекты в квантовых ямах существенно легче, чем в объемных материалах, и при рассмотрении спектров межзонного поглощения необходим учет этих эффектов. Влияние кулоновского электронно-дырочного взаимодействия на оптические свойства квантовых ям будет рассмотрено в следующем разделе.

### 3.5. Экситонные эффекты в спектрах отражения и пропускания

#### 3.5.1. Одиночная квантовая яма

Задача об отражении света от одиночной квантовой ямы, решенная менее десяти лет назад [27, 28], превратилась в классическую задачу резонансной оптической спектроскопии твердотельных наноструктур, и ее следует изучать в первую очередь.

Геометрия отражения представлена на рис. 33: плоская монохроматическая волна  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  падает слева на квантовую яму  $A$ , помещенную между двумя одинаковыми полубесконечными барьерами  $B$ . Предполагается, что барьеры характеризуются вещественной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_b$ . Поэтому волновой вектор света, связанный с частотой  $\omega$  соотношением  $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_b}$  (где  $c$  — скорость света в вакууме), также веществен. Для простоты мы рассмотрим случай нормального падения, когда волновой вектор света  $\mathbf{k}$  параллелен главной оси структуры  $z$ , а амплитуда световой волны  $\mathbf{E}_0$  лежит в плоскости интерфейсов  $(x, y)$ .

**Общее рассмотрение.** Представляет интерес вначале проанализировать поставленную задачу, исходя из общих соображений, и лишь затем перейти к конкретной модели. Так как система обладает аксиальной симметрией по отношению к оси  $z$ , электрические векторы падающей, отраженной и прошедшей световых волн параллельны друг другу и вместо векторных можно использовать скалярные амплитуды  $E_0$ ,  $E_r$  и  $E_t$ . Введем амплитудные коэффициенты отражения и пропускания света:

$$r = \frac{E_r}{E_0}, \quad t = \frac{E_t}{E_0}. \quad (3.129)$$

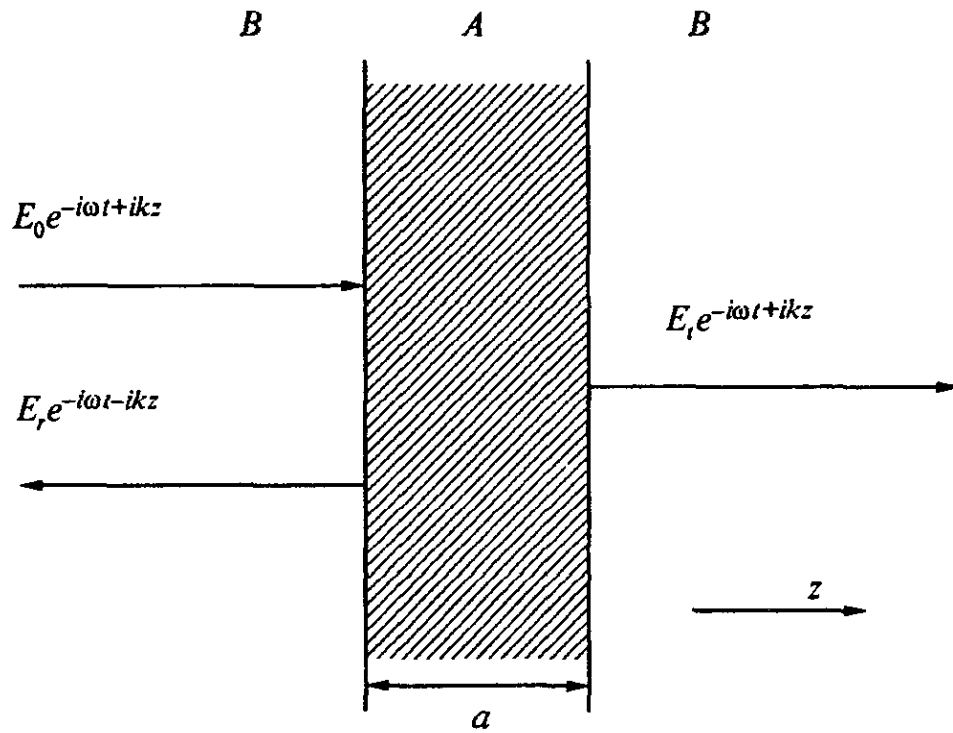


Рис. 33. Схематическое представление отражения света от квантовой ямы.

Очевидно, при отсутствии диссипации энергии внутри квантовой ямы закон сохранения энергии накладывает на эти коэффициенты ограничение

$$|r|^2 + |t|^2 = 1. \quad (3.130)$$

Выделим одно из изолированных экситонных состояний в квантовой яме, например уровень  $e1 - hh1(1s)$ , обозначим резонансную частоту выделенного экситона в виде  $\omega_0$  и рассмотрим область частот  $\Delta\omega$ , широкую по сравнению с обратным временем жизни экситона, но узкую по сравнению с расстоянием  $|\omega_0 - \omega'_0|$  до ближайшего другого экситонного резонанса  $\omega'_0$ . При нормальном падении света возбуждается экситон с нулевым двумерным волновым вектором, т.е. с  $K_x = K_y = 0$ . Экситон может рассеяться на фононе или статическом дефекте в состояние с  $K \neq 0$ , захватиться на локализованное состояние (с испусканием акустического фонона), испустить оптический фонон и высветиться в области частот за пределами интервала  $\Delta\omega$ . Время жизни экситона по отношению к указанным или аналогичным диссипативным процессам обозначим в виде  $\tau$ . Кроме того, экситон может когерентно излучить вправо или влево фотон на той же частоте  $\omega$  и с волновым вектором  $\pm k$ . Соответствующее время  $\tau_0$  называется *радиационным временем жизни экситона*. Смысл введенных параметров  $\omega_0$ ,  $\tau$  и  $\tau_0$  удобно пояснить на примере нестационарной постановки задачи: при импульсном возбуждении экситона его вол-



новая функция после окончания действия светового импульса изменяется во времени по закону  $\exp(-i\Omega_0 t)$ , где  $\Omega_0$  — комплексная частота  $\omega_0 - i(\Gamma + \Gamma_0)$ , а параметры  $\Gamma_0 = (2\tau_0)^{-1}$ ,  $\Gamma = (2\tau)^{-1}$  называются соответственно *радиационным* и *нерадиационным затуханием экситона*.

Коэффициенты  $r$  и  $t$  представляют собой линейный отклик квантовой ямы на воздействие световой волны. Рассмотрим зависимость этих коэффициентов от частоты  $\omega$ , аналитически продолжив эту зависимость на всю комплексную плоскость  $\omega = \omega' + i\omega''$ . Из общей теории линейного отклика системы на внешнее периодическое возмущение следует, что характеризующая отклик величина имеет как функция комплексной переменной  $\omega$  полюсы в точках, равных комплексным собственным частотам возбужденных состояний системы. Следовательно, в пределах интервала  $\Delta\omega$  мы можем представить зависимости  $r(\omega)$ ,  $t(\omega)$  в виде

$$r(\omega) = c_r + \frac{d_r}{\omega_0 - i(\Gamma + \Gamma_0) - \omega}, \quad (3.131)$$

$$t(\omega) = c_t + \frac{d_t}{\omega_0 - i(\Gamma + \Gamma_0) - \omega},$$

где  $c_r$ ,  $d_r$ ,  $c_t$ ,  $d_t$  — константы.

Запишем световую волну в правом барьере в виде суммы первичной волны  $E_0 \exp(-i\omega t + ikz)$  и вторичной волны  $E_{\text{exc}} \exp(-i\omega t + ikz)$ , испущенной когерентно экситоном. Рассматриваемая структура инвариантна к операции отражения в плоскости  $z = 0$ , перпендикулярной к главной оси и проходящей через середину слоя  $A$ . Поэтому амплитуда  $E_{\text{exc}}$  должна совпадать с амплитудой отраженной волны  $E_r$ , откуда получаем тождество

$$t(\omega) = 1 + r(\omega). \quad (3.132)$$

Сравнивая его с выражениями (3.131), приходим к выводу, что коэффициенты  $d_r$  и  $d_t$  совпадают.

Обозначим в виде  $\epsilon_a$  локальную диэлектрическую проницаемость квантовой ямы, полученную в пренебрежении вкладом, который вносится в диэлектрическую поляризацию выделенным экситоном. В наноструктурах типа GaAs/AlGaAs различие между величиной  $\epsilon_a$  и диэлектрической проницаемостью барьера  $\epsilon_b$  незначительно, и мы будем пренебрегать этим различием. Это означает, что в пренебрежении экситоном свет проходит слой квантовой ямы, распространяясь как в однородной среде,

т. е.  $r = 0, t = 1$ . При учете экситонного вклада влияние экситонного состояния на отражение или пропускание по мере удаления от резонансной частоты должно спадать. Поэтому для коэффициентов  $c_r$  и  $c_t$  в (3.131) получаем:

$$c_r = 0, \quad c_t = 1. \quad (3.133)$$

Учтем далее, что нет оснований считать коэффициенты  $d_r = d_t$  зависящими от нерадиационного затухания. Поэтому можно, положив формально  $\Gamma = 0$  в (3.131), т. е. выключив диссипацию, воспользоваться тождеством (3.130) и переписать его в форме:

$$\frac{|d_r|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma_0^2} + \left| 1 + \frac{d_t}{\omega_0 - \omega - i\Gamma_0} \right|^2 = 1$$

или

$$|d_t|^2 + \operatorname{Re}[d_t(\omega_0 - \omega + i\Gamma_0)] = 0,$$

где символ  $\operatorname{Re} Z$  означает реальную часть комплексного числа  $Z$  и частота  $\omega$  считается вещественной. При преобразованиях учтено равенство коэффициентов  $d_r$  и  $d_t$ . Представив  $d_t$  в виде произведения модуля  $d_t$  на фазовый множитель  $\exp i\Phi_t$ , можно привести полученное тождество к виду:

$$|d_t| + (\omega_0 - \omega) \cos \Phi_t - \Gamma_0 \sin \Phi_t = 0.$$

Следовательно,  $\cos \Phi_t = 0$  и  $|d_t| = \Gamma_0 \sin \Phi_t$  или окончательно

$$r(\omega) = \frac{i\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma_0)}, \quad (3.134)$$

$$t(\omega) = 1 + \frac{i\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma_0)},$$

где в знаменателях учтено как радиационное, так и нерадиационное затухание. При  $\Gamma \neq 0$  часть потока энергии, определяемая выражением

$$A \equiv 1 - |r|^2 - |t|^2 = \frac{2\Gamma\Gamma_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma_0)^2}, \quad (3.135)$$

поглощается в квантовой яме.

**Решение волнового уравнения.** Перейдем теперь к аналитическому решению задачи, исходя из волнового уравнения

$$-\Delta \mathbf{E} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{D}, \quad (3.136)$$

где  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции. Для поперечной световой волны, распространяющейся вдоль направления роста структуры, это векторное уравнение сводится к одномерному уравнению

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 D = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 [\epsilon_b E + 4\pi P_{\text{exc}}(z)]$$

или

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = -k_0^2 4\pi P_{\text{exc}}(z). \quad (3.137)$$

Здесь  $k_0 = \omega/c$ ;  $k^2 = \epsilon_b k_0^2$ ; различие диэлектрических постоянных  $\epsilon_{a,b}$  в материалах ямы и барьера, как и ранее, пренебрегаем;  $P_{\text{exc}}$  — вклад экситона, возбуждаемого в квантовой яме, в диэлектрическую поляризацию. Этот вклад определяется выражением (см. Приложение)

$$4\pi P_{\text{exc}}(z) = G(\omega) \Phi(z) \int \Phi^*(z'') E(z'') dz'', \quad (3.138)$$

$$\Phi(z) = \varphi(0, z, z), \quad \Phi^*(z) = \Phi(z), \quad G(\omega) = \frac{\pi a_B^3 \epsilon_b \omega_{LT}}{\omega_0 - \omega - i\Gamma},$$

где  $\varphi(\rho, z_e, z_h)$  — функция, введенная в выражение (2.55) для  $\psi_{\text{exc}}$ . Здесь для того, чтобы легче было следить за размерностью величин, введены продольно-поперечное расщепление  $\omega_{LT}$  (имеющее размерность частоты) и боровский радиус  $a_B$  экситона в соответствующем объемном материале, см. (П.9). Заметим, что для основного состояния экситона в симметричной яме функция  $\Phi(z)$  является четной функцией  $z$  при выборе центра  $z=0$  в середине ямы.

Обозначим  $k_0^2 4\pi P_{\text{exc}}(z)$  в виде  $F(z)$  и будем рассматривать функцию  $-F(z)$  как заданный неоднородный член в уравнении (3.137). Общее решение одномерного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = -F(z)$$

имеет вид

$$y(z) = E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz} + \frac{i}{2k} \int dz' e^{ik|z-z'|} F(z'). \quad (3.139)$$

Первые два слагаемых представляют собой пару линейно независимых решений однородного уравнения, т. е. уравнения (3.137) с  $F(z) = 0$ ; они описывают плоские волны, падающие на квантовую яму соответственно слева и справа. Иными словами, амплитуды  $E_1$  и  $E_2$  задаются внешними условиями: для световой волны, налетающей слева, имеем  $E_1 = E_0$  и  $E_2 = 0$ . Третье слагаемое в правой части формулы (3.139) есть частное решение уравнения (3.137) с неоднородным членом  $-F(z)$ ; оно описывает электрическое поле вторичной световой волны, индуцированной экситоном. В том, что это действительно частное решение, можно убедиться, воспользовавшись известным тождеством математической физики

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \frac{i}{2k} e^{ik|z-z'|} = -\delta(z - z').$$

Дельта-функция возникает при двойном дифференцировании, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} |z - z'| &= \text{sign}(z - z') \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 1 & \text{при } z > z' \\ -1 & \text{при } z < z' \end{cases}, \quad \frac{d}{dz} \text{sign}(z - z') = 2\delta(z - z'). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Таким образом, волновое интегродифференциальное уравнение для  $E(z)$  можно преобразовать к интегральному уравнению

$$E(z) = E_0 e^{ikz} + 2\pi i \frac{k_0^2}{k} \int dz' e^{ik|z-z'|} P_{\text{exc}}(z') \quad (3.141)$$

или

$$E(z) = E_0 e^{ikz} + i \frac{k_0^2}{2k} G(\omega) \int dz' \Phi(z') e^{ik|z-z'|} \int \Phi(z'') E(z'') dz''.$$

Почленным умножением на функцию  $\Phi(z)$  и интегрированием по  $z$  это интегральное уравнение сводится к алгебраическому уравнению

$$\Lambda = \Lambda_0 + i \frac{k_0^2}{2k} G(\omega) \Lambda \int \int dz dz' e^{ik|z-z'|} \Phi(z) \Phi(z')$$

для величины

$$\Lambda = \int \Phi(z) E(z) dz.$$

Здесь  $\Lambda_0 = E_0 \int \Phi(z) e^{ikz} dz = E_0 \int \Phi(z) \cos kz dz$ , где учтена четность функции  $\Phi(z)$ . Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания связаны с  $\Lambda$  соотношениями

$$r = \frac{\Lambda}{E_0} i \frac{k_0^2}{2k} G(\omega) \int dz' \Phi(z') \cos kz', \quad t = 1 + r. \quad (3.142)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} e^{ik|z-z'|} &= \cos k(z - z') + i \sin k|z - z'| = \\ &= \cos kz \cos kz' + \sin kz \sin kz' + i \sin k|z - z'|, \end{aligned} \quad (3.143)$$

получаем после ряда преобразований:

$$r(\omega) = \frac{i \Gamma_0}{\tilde{\omega}_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma_0)}, \quad t(\omega) = \frac{\tilde{\omega}_0 - \omega - i \Gamma}{\tilde{\omega}_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma_0)}, \quad (3.144)$$

где

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} k \omega_{LT} \pi a_B^3 \left[ \int \Phi(z) \cos kz dz \right]^2; \quad (3.145)$$

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \frac{1}{2} k \omega_{LT} \pi a_B^3 \int \int dz dz' \sin k|z - z'| \Phi(z) \Phi(z').$$

Здесь  $\tilde{\omega}_0$  — перенормированная резонансная частота экситона. Напомним, что  $\tau_0 = (2 \Gamma_0)^{-1}$  — радиационное время жизни. Выражения (3.144) полностью совпадают с полученными из общих соображений частотными зависимостями амплитудных коэффициентов отражения и пропускания (см. формулу (3.134)), если частоту  $\tilde{\omega}_0$  переобозначить в виде  $\omega_0$ .

**Учет малости ширины квантовой ямы.** Для дальнейшего упрощения можно учесть, что ширина квантовой ямы  $a$  меньше длины волны света  $2\pi/k$ , и пренебречь поправками порядка

$ka \ll 1$ , так что, например, функции  $\exp(ikz)$ ,  $\cos kz$  в подынтегральных выражениях для интегралов типа  $\int \Phi(z) \cos kz dz$  можно заменить на единицу (начало отсчета на оси  $z$  выбрано в центре ямы). В этом приближении электрическое поле (3.141) в центре ямы равно

$$E = E_0 + 2\pi i \frac{k_0^2 a}{k} P = E_0 + \frac{i}{\xi} P, \quad (3.146)$$

где  $P$  — средняя экситонная поляризация

$$P(t) = \frac{1}{a} \int dz P(z, t), \quad (3.147)$$

а безразмерный параметр  $\xi$  определен согласно

$$\xi = \frac{\epsilon_b}{2\pi k a}. \quad (3.148)$$

В том же приближении для радиационного затухания экситона имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{2} k \omega_{LT} \pi a_B^3 \left[ \int \Phi(z) \cos kz dz \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2} k \omega_{LT} \pi a_B^3 \left[ \int \Phi(z) dz \right]^2, \end{aligned} \quad (3.149)$$

а общее выражение (3.138) для диэлектрической поляризации, индуцированной экситоном, можно привести к уравнению для средней поляризации

$$(\omega_0 - \omega - i\Gamma)P = \xi \Gamma_0 E. \quad (3.150)$$

В вариационном подходе с одним варьируемым параметром  $\tilde{a}$  (см. выражение (2.55) для  $\phi(\rho, z_e, z_h)$ ) получаем

$$\int \Phi(z) dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\tilde{a}} i_{11}^0,$$

где  $i_{11}^0 = \int \phi_{e1}(z) \phi_{h1}(z) dz$  — интеграл перекрытия между огибающими в электронной подзоне  $e1$  и дырочной подзоне  $h1$ . В этом случае выражение для радиационного затухания еще более упрощается:

$$\Gamma_0 = \omega_{LT} \frac{ka_B^3}{\tilde{a}^2} \left( i_{11}^0 \right)^2. \quad (3.151)$$

**Замена нелокального отклика локальным.** Экситонный вклад в диэлектрический отклик квантовой ямы нелокален. Действительно, материальное соотношение (3.138) можно переписать в иной форме:  $P_{\text{exc}} = \int dz \chi(z, z') E(z')$ , где нелокальная восприимчивость

$$\chi(z, z') = \frac{G(\omega)}{4\pi} \Phi(z) \Phi(z'), \quad (3.152)$$

откуда следует, что поляризация в точке  $z$ , лежащей внутри квантовой ямы, зависит не только от значения  $E(z)$ , но и от значений электрического поля в других точках  $z'$  внутри ямы. Представляет интерес рассмотреть гипотетическую структуру типа изображенной на рис. 33, в которой квантовая яма заменена слоем той же ширины  $a$ , но с л о к а л ь н ы м диэлектрическим откликом, также имеющим полюс на частоте  $\omega_0 - i\Gamma$ , т. е. рассмотреть среду с неоднородной диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon(\omega, z) = \begin{cases} \epsilon_A(\omega) & \text{при } |z| < a/2 \\ \epsilon_b & \text{при } |z| > a/2 \end{cases}, \quad \epsilon_A(\omega) = \epsilon_b + \frac{\epsilon_b \omega_{\text{eff}}}{\omega_0 - \omega - i\Gamma}. \quad (3.153)$$

Множитель  $\omega_{\text{eff}}$  характеризует величину взаимодействия света с гипотетическим экситоном в слое  $A$ . Будем называть эту величину *эффективной силой осциллятора* для экситона в квантовой яме.

Отражение света от плоскопараллельной пластины, помещенной в среду с другой диэлектрической проницаемостью, — одна из типичных задач электродинамики (см., например, [29]). Амплитудный коэффициент отражения от пластины дается формулой

$$r = \frac{1 - e^{2i\phi}}{1 - e^{2i\phi} r_{BA}^2} e^{-i\phi} r_{BA}, \quad (3.154)$$

где  $r_{BA} = (n_B - n_A)/(n_B + n_A)$  — коэффициент отражения на плоской границе раздела между средами с показателями преломления  $n_B = \sqrt{\epsilon_b}$  и  $n_A = \sqrt{\epsilon_A(\omega)}$ ;  $\phi$  — фаза, набегаящая при распространении света в среде  $A$  на длине  $a$ . Наличие общего множителя  $e^{-i\phi}$  в (3.154) объясняется выбором начала отсчета на оси

z в центре слоя A. Можно проверить, что частотные зависимости коэффициента отражения, определяемого этой формулой и формулой (3.134) или (3.144), совпадают при условии

$$\omega_{\text{eff}} \ll \Gamma. \quad (3.155)$$

Действительно, при выполнении указанного неравенства правая часть (3.154) преобразуется к виду

$$\frac{i}{2} \frac{\omega_{\text{eff}} \sin \phi}{\omega_0 - \omega - i\Gamma},$$

который переходит в выражение (3.134), если положить  $(\sin \phi / 2) \omega_{\text{eff}} = \Gamma_0$  и учесть, что при  $\omega_{\text{eff}} < \Gamma$  заведомо выполнено неравенство  $\Gamma_0 \ll \Gamma$  и что в резонансной области частот вместо функции  $\phi(\omega)$  в (3.154) можно подставить ее значение при  $\omega = \omega_0$ . Таким образом, заменять нелокальный отклик (3.152) структуры с квантовой ямой на эффективный локальный отклик (3.153) можно лишь в частном случае (3.155). При этом для эффективной силы осциллятора имеем

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{2\Gamma_0}{\sin k(\omega_0)a} \approx \frac{2\Gamma_0}{k(\omega_0)a}, \quad (3.156)$$

где учтено, что ширина квантовой ямы  $a$  мала по сравнению с длиной волны света на частоте  $\omega_0$ .

**Расчет с привлечением методов квантовой электродинамики.** Выражения (3.144), (3.145) для коэффициента отражения  $r(\omega)$  и радиационного затухания  $\Gamma_0$  получены в рамках классической электродинамики. Покажем, что те же результаты можно получить, используя методы квантовой электродинамики. В связи с этим напомним, что одиночному электромагнитному кванту  $\hbar\omega$ , распространяющемуся в среде с диэлектрической постоянной  $\epsilon_b$ , отвечает амплитуда векторного потенциала

$$\mathbf{A}_0 = \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{\epsilon_b V_0 \omega} \right)^{1/2} \mathbf{e}, \quad (3.157)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор поляризации фотона;  $V_0$  — объем ящика квантования. Кроме того, нужно учесть, что в линейном приближении оператор взаимодействия электромагнитного излучения с веществом

$$\hat{V} = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \, \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (3.158)$$



где  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  — оператор плотности тока;  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  — векторный потенциал. Согласно формуле (П.3) (см. Приложение) матричный элемент оператора  $\hat{V}$  для перехода системы из основного состояния  $|0\rangle$  в возбужденное состояние  $|\text{exc}, K_x = K_y = 0\rangle$  с поглощением фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , равен

$$\langle \text{exc} | \hat{V} | 0 \rangle = -\sqrt{S} \frac{e p_{cv}}{m_0 c} A_0 \delta_{k_x, 0} \delta_{k_y, 0} \int dz \Phi(z) \cos k_z z.$$

Для расчета радиационного времени жизни экситона,  $\tau_0 = (2\Gamma_0)^{-1}$ , воспользуемся «золотым правилом» Ферми

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{e |p_{cv}|}{m_0 c} \right)^2 V_0 A_0^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \left[ \int \Phi(z) \cos k_z z dz \right]^2 \delta \left( \hbar \frac{c}{n_b} |k_z| - \hbar \omega \right), \quad (3.159)$$

где  $n_b = \sqrt{\epsilon_b}$  — показатель преломления. В соотношении (3.159) мы перешли от суммирования к интегрированию по  $k_z$ , используя правило  $\sum_{k_z} \rightarrow (V_0 / 2\pi S) \int dk_z$ , а дельта-функция учитывает закон сохранения энергии. Подставляя вместо  $A_0$  выражение (3.157) и интегрируя по  $k_z$  с учетом двух корней  $k_z = \pm \omega n_b / c$  уравнения  $(c/n_b) |k_z| - \omega = 0$ , получаем окончательно:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2\tau_0} = \frac{2\pi k(\omega_0)}{\hbar \epsilon_b} \left( \frac{e |p_{cv}|}{m_0 \omega_0} \right)^2 \left[ \int \Phi(z) \cos kz dz \right]^2 \quad (3.160)$$

в согласии с (3.145), так как  $\epsilon_b \omega_{LT} a_B^3 = (4/\hbar)(e |p_{cv}| / m_0 \omega_0)^2$ , см. (П.9).

Отраженный поток энергии  $J = (c/n_b) \hbar \omega |r(\omega)|^2$  можно также рассчитать, используя золотое правило Ферми, если подставить выражение

$$\frac{\langle 0 | \hat{V} | \text{exc} \rangle \langle \text{exc} | \hat{V} | 0 \rangle}{\hbar [\tilde{\omega}_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma_0)]} \quad (3.161)$$

для матричного элемента двухквантового процесса «первичный фотон → экситон» и «экситон → отраженный фотон». В резонансный энергетический знаменатель входит полная комплексная

энергия возбужденного состояния системы  $\hbar[\tilde{\omega}_0 - i(\Gamma + \Gamma_0)]$ . В то же время подчеркнем, что поскольку начальное и конечное состояния системы, т. е. до падения фотона и после его отражения или прохождения, одинаковы, то энергии первичного и вторичного фотонов совпадают. Тем самым процесс отражения света от квантовой ямы напоминает резонансную флюоресценцию двухуровневой атомной системы (см. [29]). В частности, так же учитывается влияние естественной ширины энергетического уровня соответственно на вероятность отражения или сечение рассеяния. Однако между двумя системами имеется существенное отличие: атом является квазиульмерным объектом и свет упруго рассеивается в широком телесном угле, тогда как в случае идеальной квантовой ямы из-за закона сохранения составляющей квазиимпульса в плоскости интерфейса свет, излучаемый экситоном, распространяется влево и вправо в строго определенных направлениях.

Используя (3.161), аналогично (3.159) получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{c}{n_b} \hbar \omega |r(\omega)|^2 = \\ & = \hbar \omega \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{e |p_{cv}| A_0}{m_0 c} \right)^4 (V_0 A_0^2)^2 \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{(\tilde{\omega}_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma_0)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{dk_z}{2\pi} \left[ \int \Phi(z) \cos k_z z dz \right]^4 \delta \left( \hbar \frac{c}{n_b} |k_z| - \hbar \omega \right), \quad (3.162) \end{aligned}$$

откуда после ряда последовательных преобразований приходим к формуле

$$|r(\omega)|^2 = \frac{\Gamma_0^2}{(\tilde{\omega}_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma_0)^2},$$

согласующейся с выражением (3.144) для  $r(\omega)$ .

**Обобщения.** Для сведения приведем без подробного вывода результаты расчета коэффициента отражения, проведенного при наклонном падении света на структуру с квантовой ямой и при более общих предположениях относительно свойств гетероструктуры.

**Учет внешней границы с вакуумом.** В реальной структуре с квантовой ямой барьерные слои имеют конечную толщину, один из них граничит с вакуумом, а другой — с

толстой подложкой. Если край фундаментального поглощения в подложке лежит ниже резонансной частоты экситона в квантовой яме, а показатели преломления материалов подложки и барьеров близки, внутренний барьер можно считать полубесконечным по толщине и коэффициент отражения от всей структуры в целом записывается в виде

$$r = r_{01} + \frac{t_{01}t_{10}e^{2i\varphi}}{1 - r_{10}r_{QW}e^{2i\varphi}} r_{QW}, \quad \varphi = n_b \frac{\omega}{c} \left( b + \frac{a}{2} \right). \quad (3.163)$$

Здесь  $r_{jl}$  и  $t_{jl}$  — амплитудные коэффициенты отражения и прохождения света на границе между средами  $j$  и  $l$  ( $j, l = 0$  в вакууме и  $1$  в барьере);  $r_{QW}$  — коэффициент отражения от квантовой ямы, определенный согласно (3.144);  $\varphi$  — фазовый сдвиг при прохождении светом расстояния, складывающегося из толщины внешнего барьера  $b$  и половины толщины ямы. Знаменатель во втором слагаемом в правой части (3.163) учитывает многократное отражение света от квантовой ямы и от границы между внешним барьером и вакуумом.

Учет рассогласования между диэлектрическими постоянными. Пусть фоновая диэлектрическая проницаемость материала ямы  $\epsilon_a$  не совпадает с диэлектрической проницаемостью барьера  $\epsilon_b$ . В этом случае множитель  $k^2$  в левой части волнового уравнения (3.137) нужно заменить на  $k_0^2 \epsilon_0(z)$ , где  $\epsilon_0(z) = \epsilon_a$  внутри ямы и  $\epsilon_b$  в барьере. Решая это уравнение, приходим к следующим выражениям для коэффициентов отражения и пропускания при нормальном падении света

$$r = \frac{E_r}{E_0} = r^{(0)} + r_{\text{exc}}, \quad t = \frac{E_t}{E_0} = t^{(0)} + r_{\text{exc}}. \quad (3.164)$$

Здесь  $r^{(0)}$  и  $t^{(0)}$  — коэффициенты отражения и пропускания, рассчитанные в пренебрежении экситонным вкладом:

$$r^{(0)} = e^{-ik_b a} r_{ba} \frac{1 - e^{2ik_a a}}{1 - r_{ba}^2 e^{2ik_a a}},$$

$$t^{(0)} = e^{ik_a a} (e^{-ik_b a} + r_{ab} r^{(0)}), \quad (3.165)$$

где  $k_{a,b} = k_0 n_{a,b}$ ;  $r_{ba} = -r_{ab} = (n_b - n_a)/(n_b + n_a)$ ;  $n_a, n_b$  — показатели преломления  $\sqrt{\epsilon_a}$  и  $\sqrt{\epsilon_b}$ ;  $a$  — толщина слоя квантовой ямы.

Для симметричной ямы с четной функцией  $\Phi(z)$  экситонный вклад в  $r$  и  $t$  имеет вид

$$r_{\text{exc}} = t^{(0)} \frac{i\bar{\Gamma}_0}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma + \bar{\Gamma}_0)}, \quad (3.166)$$

$$\bar{\Gamma}_0 = \frac{1 + r_{ab} e^{ik_a a}}{1 - r_{ab} e^{ik_a a}} \Gamma_0,$$

где величина  $\Gamma_0$  и перенормированная частота  $\tilde{\omega}_0$  отличаются от (3.145) заменой  $k$  на  $k_a$ . Напомним, что отраженная и прошедшая волны в барьерах определены как  $E_r e^{-ik_b z}$  и  $E_t e^{ik_b z}$ , а начало отсчета координаты  $z$  выбрано в центре квантовой ямы. При выводе (3.166) мы пренебрегали вкладом туннельных хвостов огибающей  $\Phi(z)$  в поляризацию  $P_{\text{exc}}$  и считали, что функция  $\Phi(z)$  отлична от нуля только в слое квантовой ямы. При совпадающих показателях преломления  $n_a, n_b$  величина  $\bar{\Gamma}_0$  совпадает с  $\Gamma_0$ , а (3.164) переходит в (3.144). Так как полюса коэффициента отражения или пропускания на комплексной плоскости определяют собственные частоты системы, то, согласно (3.166), при  $r_{ab} \neq 0$  величина  $\bar{\Gamma}_0$  вносит вклад как в вещественную, так и в мнимую часть комплексной частоты экситона. При  $k_a a \ll 1$  поправки  $\text{Im} \bar{\Gamma}_0$  и  $\tilde{\omega}_0 - \omega_0$  к резонансной частоте пренебрежимо малы и их можно не учитывать.

**Наклонное падение света.** Выражения (3.164)—(3.166) для коэффициентов  $r$  и  $t$ , выведенные для случая нормального падения, можно использовать и при наклонном падении, если переобозначить некоторые величины, входящие в эти выражения. Во-первых, нужно заменить  $k_a = k_0 n_a$  и  $k_b = k_0 n_b$  на  $k_{a,z} = (k_a^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$  и  $k_{b,z} = (k_b^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$ , где  $k_{\parallel} = k_a \sin \theta_a = k_b \sin \theta_b$  — составляющая волнового вектора света в плоскости интерфейсов;  $\theta_a$  и  $\theta_b$  — углы падения в слоях ямы и барьера, связанные между собой и с внешним углом падения  $\theta_0$  стандартными соотношениями  $n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b = \sin \theta_0$ . Во-вторых, показатели преломления  $n_a, n_b$  в выражениях для  $r_{ab}, r_{ba}, t_{ab}, t_{ba}$  нужно заменить на  $n_a \cos \theta_a, n_b \cos \theta_b$  для света  $s$ -поляризации ( $TE$ -мода; электрический вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения) и на  $n_a \sec \theta_a, n_b \sec \theta_b$  для света  $p$ -поляризации ( $TM$ -мода; вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения). В полупроводниковых гетероструктурах с решеткой цинковой обманки экситон с тяжелой дыркой в поляризации  $\mathbf{E} \parallel z$  оптически неактивен. С учетом этого правила отбора при наклонном падении света величина  $\Gamma_0(k_a)$  в (3.166) заменяется на  $\Gamma_0(k_{a,z}) \sec^2 \theta_a$  для  $TE$ -моды и на  $\Gamma_0(k_{a,z})$  для  $TM$ -моды.

**Эксперимент.** Измерение спектров отражения  $R(\omega) = |r(\omega)|^2$  является, наряду с анализом фотолюминесценции, наиболее простым способом характеристики гетероструктуры. Для изучения спектров пропускания  $T(\omega) = |t(\omega)|^2$  приходится удалять подложку и часть буферного слоя, стравливая их в некоторой области образца. Что касается поглощающей способности гетероструктуры

$$A(\omega) = 1 - R(\omega) - T(\omega), \quad (3.167)$$

то для ее нахождения требуется проводить особенно надежные измерения  $R$  и  $T$ , иначе точность определяемых значений  $A$  будет невысокой.

Еще одно замечание касается влияния на оптические спектры неоднородного уширения резонансной частоты экситона в гетероструктурах, т. е. плавной координатной зависимости  $\omega_0$  в плоскости квантовой ямы или в объеме сверхрешетки из-за неидеальности структуры. Наиболее простой и эффективный способ учета неоднородного уширения (*inhomogeneous broadening*) при расчете коэффициента отражения — это формальная замена в соответствующих формулах нерадиационного затухания  $\Gamma$  на эффективное нерадиационное затухание  $\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma + \Gamma_{\text{inh}}$ , где  $\Gamma_{\text{inh}}$  — параметр уширения. Для расчета спектров пропускания или поглощения такая процедура некорректна и требуется привлекать более сложные методы.

Рис. 34 демонстрирует спектры отражения от гетероструктуры с квантовыми ямами  $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  ( $x = 0.3$ ). Структура была выращена на подложке из  $\text{GaAs}$ , ориентированной по оси  $[001]$ . На подложку вначале были нанесены буферный слой из специально не легированного  $\text{GaAs}$  толщиной  $1000\text{\AA}$  и сверхрешетка  $\text{AlAs}/\text{GaAs}$  (36 периодов). Затем последовательно выращивались 11 квантовых ям толщиной 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 150, 200 и  $325\text{\AA}$ , разделенных барьерами из  $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$  толщиной  $225\text{\AA}$ . Барьерный слой, покрывающий последнюю, самую толстую, квантовую яму, также имел толщину  $225\text{\AA}$ .

На рис. 34 показаны резонансные контуры отражения, измеренные в окрестности резонансной частоты  $\omega_0$  экситона с тяжелой дыркой  $e1-hh1(1s)$ , в ямах шириной 200, 150 и  $100\text{\AA}$ . Значения  $\omega_0$  в различных ямах достаточно удалены друг от друга, так что резонансные контуры не перекрываются и как бы представляют набор оптических спектров отражения от структур с одиночными квантовыми ямами, имеющими разные толщины и расположенными на различных расстояниях от внешней поверхности. Сплошные кривые на рис. 34 — результат подгонки по формуле (3.163).

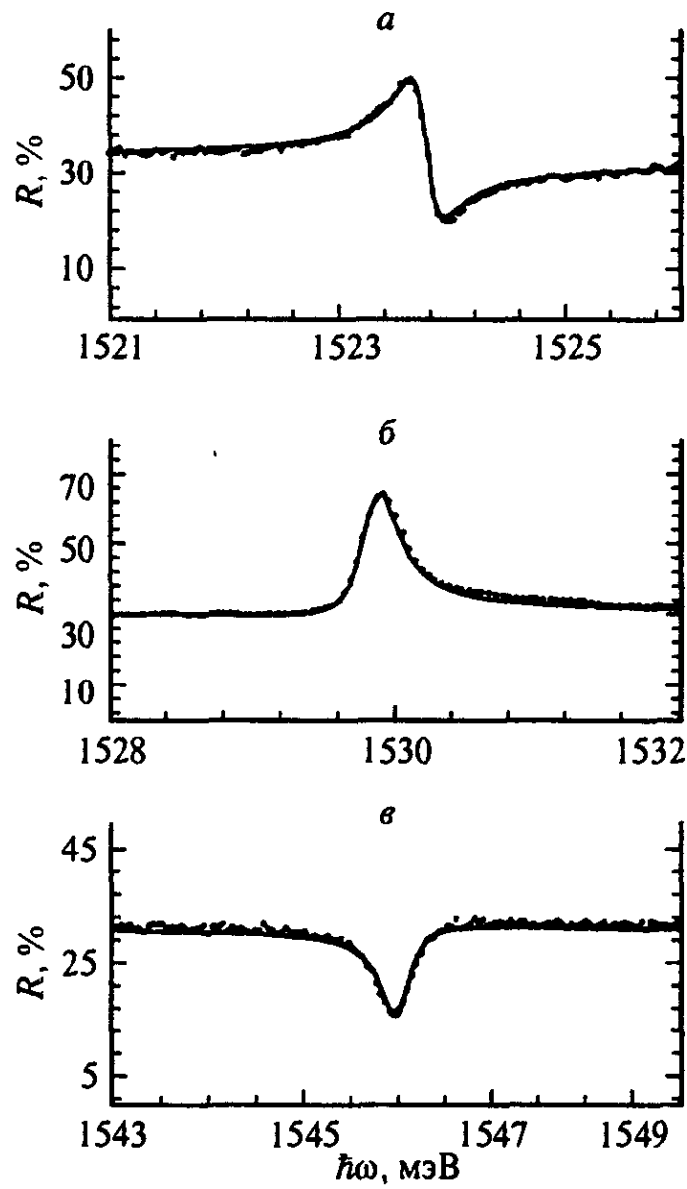


Рис. 34. Спектры оптического отражения от структуры с изолированными квантовыми ямами GaAs/Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As, измеренные при  $T = 10$  К в окрестности экситонных резонансов  $e1-hh1(1s)$ , в ямах шириной 200 Å (а), 150 Å (б) и 100 Å (в). Угол падения близок к нулю.

Точки — эксперимент; сплошные кривые — расчет по формуле (3.163) [30].

Преобразуем эту формулу к виду, удобному для анализа. Для этого прежде всего заметим, что отношение

$$r'_{QW} = \frac{r_{QW}}{1 - r_{QW} r_{10} e^{2i\varphi}}$$

можно существенно упростить:

$$r'_{QW} = \frac{i\Gamma_0}{\omega'_0 - \omega - i(\Gamma + \Gamma'_0)}, \quad (3.168)$$

$$\omega'_0 = \omega_0 + r_{10} \Gamma_0 \sin 2\varphi, \quad \Gamma'_0 = \Gamma_0 (1 + r_{10} \cos 2\varphi).$$

Здесь  $\omega'_0$  и  $\Gamma'_0$  — резонансная частота и радиационное затухание экситона, перенормированные с учетом взаимодействия экситона со световой волной, индуцированной этим экситоном и отраженной от внешней поверхности. Подставляя (3.168) в (3.163), после ряда преобразований получаем:

$$R(\omega) = |r(\omega)|^2 = R_0 + \frac{A + Bx}{1 + x^2}, \quad (3.169)$$

где

$$x = \frac{\omega - \omega'_0}{\Gamma}, \quad R_0 = r_{01}^2;$$

$$A = t_{01} t_{10} s [t_{01} t_{10} s - 2r_{01} (1 + s') \cos 2\varphi];$$

$$B = 2r_{01} t_{01} t_{10} s \sin 2\varphi, \quad s = \frac{\Gamma_0}{\Gamma}, \quad s' = \frac{\Gamma'_0}{\Gamma}.$$

Напомним, что, согласно формулам Френеля, при нормальном падении

$$r_{10} = -r_{01} = \frac{n_b - 1}{n_b + 1}, \quad t_{01} t_{10} = \frac{4n_b}{(n_b + 1)^2}.$$

В зависимости от расстояния между центром ямы и внешней поверхностью коэффициенты  $A$  и  $B$  могут принимать значения разного знака и, в частности, поочередно обращаться в ноль. При  $A = 0$ ,  $B < 0$  резонансный контур состоит из максимума при  $\omega < \omega'_0$  и минимума при  $\omega > \omega'_0$  (см. рис. 34, а). При  $B = 0$  в спектре имеется один максимум ( $A > 0$ ; рис. 34, б) или один минимум ( $A < 0$ ; рис. 34, в). Наилучшее согласие между расчетными и экспериментальными спектрами на рис. 34 получено при  $\Gamma \approx \Gamma_0$ ,  $\Gamma_0 = (60 \pm 15)$  мкэВ; погрешность учитывает разрешающую способность спектрометра. Отсюда для излучательного времени жизни экситона получаем  $\tau_0 = (2\Gamma_0)^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-12}$  с = 5 пс.

### 3.5.2. Структуры с периодическим набором квантовых ям

**Неограниченная периодическая структура с квантовыми ямами.** Рассмотрим бесконечную эквидистантную систему квантовых ям, центры которых расположены в точках  $z_n = nd$ , где  $n$  — любые целые числа;  $d$  — период структуры, равный сумме толщин  $a + b$  отдельной ямы и разделяющего соседние ямы барьера. Толщину  $b$  будем считать достаточно большой, чтобы волновые функции экситонов, возбуждаемых в различных ямах, не пере-

крывались. Для заведомого выполнения этого условия в типичных полупроводниковых гетероструктурах нужно, чтобы значение  $b$  превышало 40—50 Å. В этом случае экситонный вклад в диэлектрическую поляризацию среды складывается из одноямных вкладов:  $P_{\text{exc}}(z) = \sum P_{\text{exc}}^{(n)}(z)$ , а материальное соотношение для одноямого вклада  $P_{\text{exc}}^{(n)}(z)$  дается формулой (3.138), в которую нужно подставить функцию (П. 7) со сдвинутым аргументом, т. е. функцию  $\Phi_n(z) = \Phi(z - nd)$ . Собственные возбужденные состояния в такой среде на частоте, близкой к  $\omega_0$ , имеют смешанную экситон-фотонную природу, включая как электромагнитную, так и экситонную компоненты. Это есть не что иное, как перенесенный на структуры с квантовыми ямами аналог экситонных поляритонов, или светоэкситонов, ранее широко исследованных в объемных кристаллах. При отсутствии диссипативных процессов (иначе говоря, при  $\Gamma = 0$ ) экситонный поляритон распространяется неограниченно далеко, испытывая непрерывные когерентные превращения из экситона в фотон и из фотона в экситон. В результате дисперсия гибридной волны отличается от дисперсии невзаимодействующих фотонов и экситонов: вблизи точки пересечения исходных дисперсионных ветвей возникает характерное антипересечение.

Выведем дисперсионное уравнение для экситонных поляритонов в периодической структуре с квантовыми ямами [31]. Как и в предыдущем разделе, рассмотрение будет проводиться в частном случае волны, распространяющейся вдоль главной оси структуры  $z$ , когда составляющая волнового вектора  $k_{\parallel}$  в плоскости интерфейсов  $(x, y)$  равна нулю, а электрическое поле и диэлектрическая поляризация среды лежат в этой плоскости. Для вывода дисперсионного соотношения подставим в выражение

$$P_{\text{exc}}^{(n)}(z) = \frac{G(\omega)}{4\pi} \Phi_n(z) \int \Phi_n(z'') E(z'') dz''$$

для экситонной поляризации в  $n$ -й яме электрическое поле, создаваемое экситоном, возбуждаемым в этой и во всех остальных ямах (см. формулу (3.141)):

$$E(z) = 2\pi i \frac{k_0^2}{k} \sum_{n'} \int dz' e^{ik|z-z'|} P_{\text{exc}}^{(n')}(z'). \quad (3.170)$$

Тем самым мы исключим электрическое поле и получим систему линейных уравнений, связывающих между собой экситонные поляризации в разных ямах. Удобно ввести среднюю экситонную поляризацию в  $n$ -й яме:  $P_n = a^{-1} \int dz P_{\text{exc}}^{(n)}(z)$ . Тогда получен-



ная система интегральных уравнений для  $P_{\text{exc}}^{(n)}(z)$  превращается в систему линейных алгебраических уравнений для средних величин:

$$(\tilde{\omega}_0 - \omega - i\Gamma)P_n + \sum_{n'} \Lambda_{nn'} P_{n'} = 0, \quad \Lambda_{nn'} = -i\Gamma_0 e^{ikd|n-n'|}. \quad (3.171)$$

В дальнейшем знак «тильда» над перенормированной резонансной частотой экситона будем опускать.

Таким образом, задача об экситонных поляритонах в структуре с квантовыми ямами сводится к нахождению собственных возбуждений в одномерной цепочке классических осцилляторов, характеризующихся резонансной частотой  $\omega_0$ , параметром затухания  $\Gamma + \Gamma_0$  и набором коэффициентов связи  $\Lambda_{nn'}$  между двумя различными осцилляторами  $n$  и  $n'$ . Коэффициенты связи равны произведению радиационного затухания экситона в одиночной яме на фазовый множитель, определяемый расстоянием между центрами ям. Поэтому матрица  $\Lambda_{nn'}$  симметрична, но неэрмитова:  $\Lambda_{nn'} = \Lambda_{n'n} \neq \Lambda_{n'n}^*$ .

Решение системы уравнений (3.171) ищем в блоховской форме:  $P_n = P_0 e^{iKdn}$ . Вначале рассмотрим частный случай недиссипативной среды и положим  $\Gamma = 0$ . Тогда волновой вектор поляритона  $K$  можно считать вещественным. Подставим решение в (3.171) и выполним суммирование по  $n'$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . При этом для сходимости добавим к  $k$  мнимое число  $i\eta$ ; после суммирования значение  $\eta > 0$  нужно устремить к нулю. В итоге приходим к уравнению

$$\left[ \omega_0 - \omega + i\Gamma_0 \left( 1 + \frac{1}{e^{i(K+k)d} - 1} + \frac{1}{e^{i(-K+k)d} - 1} \right) \right] P_0 = 0.$$

При  $P_0 \neq 0$  в ноль должно обращаться выражение в квадратной скобке, которое можно преобразовать к виду

$$\omega_0 - \omega - \frac{\sin kd}{\cos kd - \cos Kd} \Gamma_0.$$

Приравнявая его нулю, приходим к дисперсионному уравнению для экситонных поляритонов, распространяющихся вдоль главной оси структуры с квантовыми ямами:

$$\omega = \omega_0 - \frac{\sin kd}{\cos kd - \cos Kd} \Gamma_0 \quad (3.172)$$

или

$$\cos Kd = \cos kd - \frac{\Gamma_0}{\omega_0 - \omega} \sin kd. \quad (3.173)$$

Метод матриц переноса. Для вывода дисперсионного уравнения при  $\Gamma \neq 0$  воспользуемся методом матриц переноса, уже применявшимся в гл. 2. С этой целью рассчитаем вначале матрицу переноса через одиночную яму. Мы определяем здесь матрицу переноса  $\hat{T}$  следующим образом:

$$\begin{pmatrix} E'_+ \\ E'_- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}. \quad (3.174)$$

Амплитуды  $E_{\pm}$ ,  $E'_{\pm}$  определены так, что волны, налетающая и выходящая по левую сторону от квантовой ямы, записываются в виде

$$E_+ e^{ik(z+d/2)} \text{ и } E_- e^{-ik(z+d/2)},$$

а волны по правую сторону от ямы — в виде

$$E'_- e^{-ik(z-d/2)} \text{ и } E'_+ e^{ik(z-d/2)},$$

где  $d$  — фиксированная длина, которая позднее будет положена равной периоду  $a + b$  регулярной структуры с квантовыми ямами. Иными словами, эти амплитуды отнесены соответственно к плоскостям  $z = -d/2$  и  $z = d/2$ . Обозначим коэффициенты отражения и преломления при таком определении амплитуд в виде  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{t}$ ; очевидно, они связаны с аналогичными коэффициентами (3.129), привязанными к центру квантовой ямы, фазовым множителем  $e^{ikd}$ :  $\tilde{r} = e^{ikd} r$ ,  $\tilde{t} = e^{ikd} t$ . Компоненты матрицы переноса можно выразить через эти коэффициенты:

$$\hat{T} = \frac{1}{\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{t}^2 - \tilde{r}^2 & \tilde{r} \\ -\tilde{r} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.175)$$

Для доказательства рассмотрим вначале свет, падающий на квантовую яму слева, так что  $E'_- = 0$ . Согласно (3.174), имеем в этом случае

$$E'_+ = T_{11}E_+ + T_{12}E_-, \quad 0 = T_{21}E_+ + T_{22}E_-, \quad (3.176)$$

т. е.

$$\tilde{r} = \frac{E_-}{E_+} = -\frac{T_{21}}{T_{22}}, \quad \tilde{t} = \frac{E'_+}{E_+} = \frac{T_{22}T_{11} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}.$$

Для света, падающего справа,  $E_+ = 0$ ,  $E'_+ = T_{12}E_-$ ,  $E'_- = T_{22}E_-$ , и, следовательно,

$$\tilde{r} = \frac{E'_+}{E'_-} = \frac{T_{12}}{T_{22}}, \quad \tilde{t} = \frac{E_-}{E'_-} = \frac{1}{T_{22}}. \quad (3.177)$$

Сравнивая (3.176) и (3.177), получаем соотношения  $T_{12} = -T_{21}$ ,  $T_{22}T_{11} - T_{12}T_{21} = 1$ , а также выражение (3.175) для  $\hat{T}$ .

Блоховские решения удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} E'_+ \\ E'_- \end{pmatrix} = e^{iKd} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}, \quad (3.178)$$

что приводит (см. гл. 2) к дисперсионному уравнению

$$\cos Kd = \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) = \frac{\tilde{t}^2 - \tilde{r}^2 + 1}{2\tilde{t}} = \frac{e^{ikd}(t^2 - r^2) + e^{-ikd}}{2t}.$$

Так как  $t = 1 + r$ , полученное выражение можно упростить к виду

$$\cos kd + i \frac{r}{1+r} \sin kd.$$

Учитывая, что, согласно (3.134),

$$\frac{r}{1+r} = \frac{i\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i\Gamma},$$

приходим к дисперсионному уравнению

$$\cos Kd = \cos kd - \frac{\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i\Gamma} \sin kd, \quad (3.179)$$

которое отличается от (3.172) лишь заменой  $\omega_0$  на  $\omega_0 - i\Gamma$ .

Запрещенная зона. Из уравнения (3.172) следует, что при  $\Gamma = 0$  в спектре поляритонов имеется запрещенная зона, лежащая между значениями

$$\omega = \omega_0 - \Gamma_0 \operatorname{tg} \frac{kd}{2} \quad \text{при} \quad K = \frac{\pi}{d}$$

$$\omega = \omega_0 + \Gamma_0 \operatorname{ctg} \frac{kd}{2} \quad \text{при } K = 0.$$

В частности, в структуре, период которой удовлетворяет условию  $k(\omega_0)d = \pi/4, \pi/2$  (антибрэгговская структура) или  $3\pi/4$ , т. е. равен одной восьмой, одной четвертой или трем восьмым длины волны света в барьере, края запрещенной зоны задаются парами значений:  $\omega_0 + (1 \pm \sqrt{2})\Gamma_0$ ,  $\omega_0 \pm \Gamma_0$  и  $\omega_0 + (\pm\sqrt{2} - 1)\Gamma_0$  соответственно.

Резонансные брэгговские структуры. Особый частный случай представляют структуры с квантовыми ямами, период которых удовлетворяет брэгговскому условию

$$k(\omega_0)d = \pi \quad \text{или} \quad d = \lambda(\omega_0)/2. \quad (3.180)$$

Согласно дисперсионному уравнению (3.179), значение  $K$  на частоте экситонного резонанса  $\omega = \omega_0$  в точности совпадает с  $k(\omega_0) \equiv 2\pi/\lambda(\omega_0) = (\omega_0/c)n_b$ , как если бы свет распространялся в однородной среде с показателем преломления  $n_b$ . Этот кажущийся парадокс разрешается, если проанализировать пространственное распределение электрического поля возбужденного состояния системы. Для блоховских решений (3.178) амплитуды электрического поля  $E_+$ ,  $E_-$  в центре любого барьерного слоя удовлетворяют соотношениям

$$e^{iKd}E_+ = T_{11}E_+ + T_{12}E_-, \quad e^{iKd}E_- = T_{21}E_+ + T_{22}E_-. \quad (3.181)$$

Для резонансной брэгговской структуры на частоте  $\omega_0$  фазовые множители  $e^{iKd}$ ,  $e^{ikd}$  равны  $-1$ , а компоненты  $T_{21}$ ,  $T_{22}$  матрицы переноса удовлетворяют соотношению  $1 + T_{22} = -T_{21}$ , вытекающему из тождества  $t = 1 + r$ . Тогда из второго соотношения (3.181) следует, что амплитуды  $E_+$  и  $E_-$  совпадают и электрическое поле  $E(z)$  пропорционально  $\cos[k(\omega_0)(z - d/2)]$ , если начало отсчета  $z = 0$  выбрано в центре одной из ям. Заменяя  $k(\omega_0)$  на  $\pi/d$ , получаем  $E(z) \propto \cos(\pi z/d - \pi/2) = \sin(\pi z/d)$ . Таким образом, световая волна в резонансной брэгговской структуре при  $\omega = \omega_0$  представляет собой стоячую волну с пучностью в центре барьерных слоев и узлом в центре квантовых ям. Так как по условию рассматривается экситонное состояние с четной огибающей двухчастичной волновой функции, а электрическое поле нечетно относительно центра любой ямы, то стоячая электромагнитная волна не взаимодействует с экситонами и эквивалентна суперпозиции двух встречных волн, распространяющихся в

однородной среде с показателем преломления  $n_b$  и имеющих одинаковые амплитуды.

Короткопериодные структуры. К структурам с периодом  $d$ , малым по сравнению с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$ , применимо приближение оптически однородной среды. При описании распространения света в такой среде можно вводить эффективную локальную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)$ , связывающую векторы электрической индукции и электрического поля, усредненные по длине, малой по сравнению с  $2\pi/K$ , но превышающей период  $d$ . Как и в объемных кристаллах, дисперсионное соотношение принимает вид

$$\left(\frac{cK}{\omega}\right)^2 = \epsilon_{\text{eff}}(\omega). \quad (3.182)$$

Выражение для  $\epsilon_{\text{eff}}$  можно вывести, разлагая тригонометрические функции в уравнении (3.179) по малым параметрам  $Kd$  и  $kd$  до второго порядка включительно. В результате вместо (3.179) получаем:

$$1 - \frac{1}{2}(Kd)^2 \approx 1 - \frac{1}{2}(kd)^2 - kd \frac{\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i\Gamma},$$

что приводится к уравнению (3.182) с

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = \epsilon_b + \frac{\epsilon_b \omega_{LT}^{MQW}}{\omega_0 - \omega - i\Gamma}, \quad (3.183)$$

где  $\omega_{LT}^{MQW} = 2\Gamma_0/kd$ . Критерий применимости приближения однородной среды  $(Kd)^2 \ll 1$  эквивалентен неравенству

$$(kd)^2 \frac{\omega_{LT}^{MQW}}{|\omega_0 - \omega - i\Gamma|} \ll 1.$$

Структуры с конечным числом квантовых ям. Мы начнем рассмотрение распространения света через стопку  $N$  эквидистантных квантовых ям с предельного случая слабого экситон-фотонного взаимодействия, т. е. будем считать коэффициент отражения (3.144) от одной квантовой ямы малой величиной, что эквивалентно выполнению неравенства  $\Gamma_0 \ll |\omega_0 - \omega - i\Gamma|$ . В этом случае при расчете коэффициента отражения  $r_N$  от всей системы в целом можно пренебречь мно-

гократными процессами и суммировать амплитуды волн, отраженных от отдельных ям:

$$r_N = e^{ikd} (1 + e^{i2kd} + e^{i4kd} + \dots) r = e^{iNkd} \frac{\sin Nkd}{\sin kd} r. \quad (3.184)$$

Здесь и далее амплитуды падающей и отраженной волн отнесены к плоскости, отстоящей на половину периода  $d$  от крайней ямы. Этим объясняется наличие общего множителя  $e^{ikd}$  в правой части (3.184). На резонансной частоте  $\omega_0$  коэффициент отражения по потоку энергии,  $R_N = |r_N|^2$ , принимает значение

$$R_N(\omega_0) = \left( \frac{\sin Nk(\omega_0)d}{\sin k(\omega_0)d} \right)^2 r^2(\omega_0),$$

где  $r(\omega_0) = -\Gamma_0 / (\Gamma + \Gamma_0)$ . Имеется ряд определенных значений периода  $d$ , при которых это выражение еще более упрощается. Во-первых, это значения, которые удовлетворяют брэгговскому условию, когда произведение  $k(\omega_0)d \equiv (\omega_0/c)n_b d$  кратно  $\pi$  и коэффициент  $R_N(\omega_0)$  достигает максимального значения  $N^2 r^2(\omega_0)$ . Второй характерный набор периодов удовлетворяет «антибрэгговскому» условию  $k(\omega_0)d = \pi(m + 1/2)$ , где  $m$  — целое число. В антибрэгговской структуре вклады в амплитудный коэффициент отражения от соседних квантовых ям взаимно сокращаются. Поэтому при четном числе  $N$  коэффициент  $R_N(\omega_0)$  равен нулю, а при нечетном  $N$  он совпадает с коэффициентом отражения от одной квантовой ямы.

Перейдем теперь к расчету спектров отражения, пропускания и поглощения в структурах с  $N$  эквидистантными квантовыми ямами при произвольном соотношении между  $\Gamma_0$ ,  $|\omega_0 - \omega|$  и  $\Gamma$ , когда многократные процессы вносят вклад, сопоставимый с однократными. Для этого учтем, что собственными числами матрицы переноса  $\hat{T}$  через одиночную яму являются фазовые множители  $e^{\pm iKd}$ , где величина  $K$  имеет смысл волнового вектора экситонного поляритона на частоте  $\omega$  в неограниченной периодической структуре и удовлетворяет дисперсионному соотношению (3.179). Введем собственные векторы матрицы переноса:  $\hat{T}\hat{C}_{1,2} = e^{\pm iKd}\hat{C}_{1,2}$ . Двухкомпонентные столбцы  $\hat{C}_{1,2}$  можно представить в виде

$$\hat{C}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{1,2} \end{bmatrix}, \quad a_{1,2} = \frac{r}{e^{-ikd} - te^{\pm iKd}}. \quad (3.185)$$

Обозначим в виде  $E_{\pm}^L$  и  $E_{\pm}^R$  амплитуды электрического поля соответственно на плоскости  $z = z_L$ , отстоящей слева на  $d/2$

от крайней левой ямы, и на плоскости  $z = z_R$ , отстоящей справа на  $d/2$  от крайней правой ямы. Пусть исходная световая волна амплитуды  $E_0$  падает на структуру со стороны левого барьера, так что

$$E_+^L = E_0, \quad E_-^L = E_r, \quad E_+^R = E_t, \quad E_-^R = 0.$$

Определим коэффициенты отражения и пропускания как  $r_N = E_r/E_0$ ,  $t_N = E_t/E_0$  и запишем амплитуды  $E_\pm^L, E_\pm^R$  в виде двухкомпонентных столбцов

$$\hat{E}^L = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ r_N \end{bmatrix}, \quad \hat{E}^R = E_0 \begin{bmatrix} t_N \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.186)$$

Разложим  $\hat{E}^L$  по собственным столбцам матрицы переноса

$$\hat{E}^L = f_1 \hat{C}_1 + f_2 \hat{C}_2.$$

Действуя на это разложение матрицей  $\hat{T}^N$ , получаем:

$$\hat{E}^R = f_1 e^{iKNd} \hat{C}_1 + f_2 e^{-iKNd} \hat{C}_2,$$

откуда, в частности, следует соотношение  $a_1 f_1 e^{iKNd} + a_2 f_2 e^{-iKNd} = 0$ . Это позволяет привести коэффициенты отражения и пропускания к виду

$$r_N = \frac{a_+ a_- (e^{iNKd} - e^{-iNKd})}{a_+ e^{iNKd} - a_- e^{-iNKd}}, \quad t_N = \frac{a_+ - a_-}{a_+ e^{iNKd} - a_- e^{-iNKd}}.$$

Подставляя сюда выражения (3.185) для  $a_{1,2}$ , находим после ряда преобразований:

$$r_N = \frac{\tilde{r} \sin NKd}{\sin NKd - \tilde{t} \sin (N-1)Kd}; \quad (3.187)$$

$$t_N = \frac{\tilde{t} \sin Kd}{\sin NKd - \tilde{t} \sin (N-1)Kd}, \quad (3.188)$$

где  $\tilde{r} = e^{ikd} r$  и  $\tilde{t} = e^{ikd} t$ , а коэффициенты  $r$  и  $t$  определяются соотношениями (3.144) для структуры с  $\epsilon_a = \epsilon_b$  или соотношениями (3.164) в общем случае, когда  $\epsilon_a \neq \epsilon_b$ .

В пределе слабого светозакритического взаимодействия в знаменателе выражения для  $r_N$  можно заменить  $\tilde{t}$  на невозмущенное значение  $e^{ikd}$  и  $K$  на  $k$ . Учитывая, что

$\sin Nkd - e^{ikd} \sin(N-1)kd = e^{-i(N-1)kd} \sin kd$ , приходим к приближенной формуле (3.184).

Другой частный случай, допускающий существенные упрощения, — это короткопериодная структура. Рассматривая такую среду как оптически однородную и описываемую диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)$ , введенной согласно (3.183), получаем:

$$r_N = \frac{1 - e^{2i\varphi}}{1 - e^{2i\varphi} r_{21}^2} r_{12}, \quad t_N = e^{2i\varphi} \frac{t_{12} t_{21}}{1 - e^{2i\varphi} r_{21}^2}. \quad (3.189)$$

Здесь  $r_{jl}$  и  $t_{jl}$  ( $j, l = 1, 2$ ) — амплитудные коэффициенты отражения на границе между средами  $j$  и  $l$ ; среда 1 — барьер с показателем преломления  $n_b$ ; среда 2 — короткопериодная структура с показателем преломления  $n_2 = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}(\omega)}$ ;  $\varphi$  — фаза  $(\omega/c)n_2 Nd$ , набегаяющая при прохождении слоя 2.

Резонансная брэгговская структура с  $\epsilon_a = \epsilon_b$ . В резонансной брэгговской структуре с  $N$  ямами при

$$N|kd - \pi| = N \frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} \ll 1 \quad (3.190)$$

коэффициенты отражения и пропускания принимают чрезвычайно простую форму:

$$r_N = -\frac{iN\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma + N\Gamma_0)}, \quad (3.191)$$

$$t_N = (-1)^N \frac{\omega_0 - \omega - i\Gamma}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma + N\Gamma_0)},$$

т. е. вся зависимость от числа ям  $N$  сводится к замене в выражениях для  $r_1 = -r$ ,  $t_1 = -t$  радиационного затухания  $\Gamma_0$  на  $N\Gamma_0$  и к умножению получающегося таким образом коэффициента пропускания на знакопеременный множитель  $(-1)^{N-1}$ . Заметим, что в области частот, где  $N|kd - \pi| \geq 1$ , конструктивная интерференция световых волн нарушается и формула (3.191) неприменима.

Экситонные поляритоны в структуре с  $N$  квантовыми ямами. Модель одномерной цепочки классических осцилляторов, задаваемая уравнениями (3.171), применима и для конечного числа квантовых ям. Поэтому задачу об отражении света можно было решать, исходя из системы уравнений для средних поляризаций:



$$(\omega_0 - \omega - i\Gamma)P_n + \sum_{n'} \Lambda_{nn'} P_{n'} = \xi \Gamma_0 E_0 e^{ikdn}, \quad \xi = \frac{\epsilon_b}{2\pi ka}, \quad (3.192)$$

в которую в отличие от (3.171) включено также внешнее поле амплитуды  $E_0$  (см. формулы (3.148), (3.150)). С учетом коэффициентов связи  $\Lambda_{nn'}$  рассматриваемая система  $N$  экситонных осцилляторов характеризуется  $N$  комплексными собственными частотами  $\omega_j$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ). Эти частоты совпадают с полюсами коэффициента отражения  $r_N$ , рассматриваемого как функция комплексной переменной  $\omega$ . Структуре с одиночной ямой отвечает одна собственная частота  $\omega_1 = \omega_0 - i(\Gamma + \Gamma_0)$ . В общем случае в структуре с  $N$  ямами все частоты  $\omega_j$  разные. Однако, согласно (3.191), коэффициент отражения от резонансной брэгговской структуры имеет всего лишь один полюс  $\omega_1 = \omega_0 - i(\Gamma + N\Gamma_0)$ . Это означает, что в такой структуре  $N - 1$  собственных мод оптически неактивны, им отвечает неперенормированная частота возбуждения  $\omega_j = \omega_0 - i\Gamma$  ( $j = 2, \dots, N$ ) и лишь одна мода взаимодействует со светом, при этом ее радиационное затухание возрастает в  $N$  раз. Одновременно в  $N$  раз возрастает числитель в дробном выражении (3.191) для коэффициента отражения, т. е. эту моду можно назвать сверхизлучательной.

**Эксперимент.** Для резонансной брэгговской структуры теория предсказывает сильное возрастание амплитуды и полуширины экситонного контура отражения. Спектры отражения (рис. 35), измеренные в структурах с десятью квантовыми ямами  $\text{CdTe}/\text{CdZnTe}$ , подтверждают предсказания теории. Из (3.191) следует, что для брэгговской структуры с  $N$  ямами можно использовать выражение (3.169) для коэффициента отражения от структуры с одиночной ямой, если заменить в (3.169) радиационное затухание  $\Gamma_0$  на  $N\Gamma_0$ . При ширине покрывающего слоя  $b/2$ , где  $b$  — толщина барьера, разделяющего соседние ямы, фаза  $2\varphi(\omega_0)$  равна  $2\pi$ , а значит, в (3.169) можно положить  $\cos 2\varphi = 1$ ,  $\sin 2\varphi = 0$ ,  $B = 0$ , и спектр отражения имеет форму симметричного пика с максимумом при  $\omega = \omega_0$  и полушириной  $N\Gamma_0(1 + r_{10})$ . Из рис. 35 видно, что по сравнению с брэгговской в антибрэгговской структуре как амплитуда, так и полуширина контура отражения сильно подавлены. Наилучшее согласие между теорией и экспериментом получено при  $\Gamma_0 = 0.12$  мэВ,  $\Gamma = 0.3$  мэВ,  $\epsilon_b = 8.8$ . При этом критерий (3.190) применимости формул (3.191) заведомо выполнен в области частот, приведенной на рис. 35.

Рис. 36 позволяет сопоставить спектры отражения, пропускания и поглощения, полученные на структуре с квантовыми

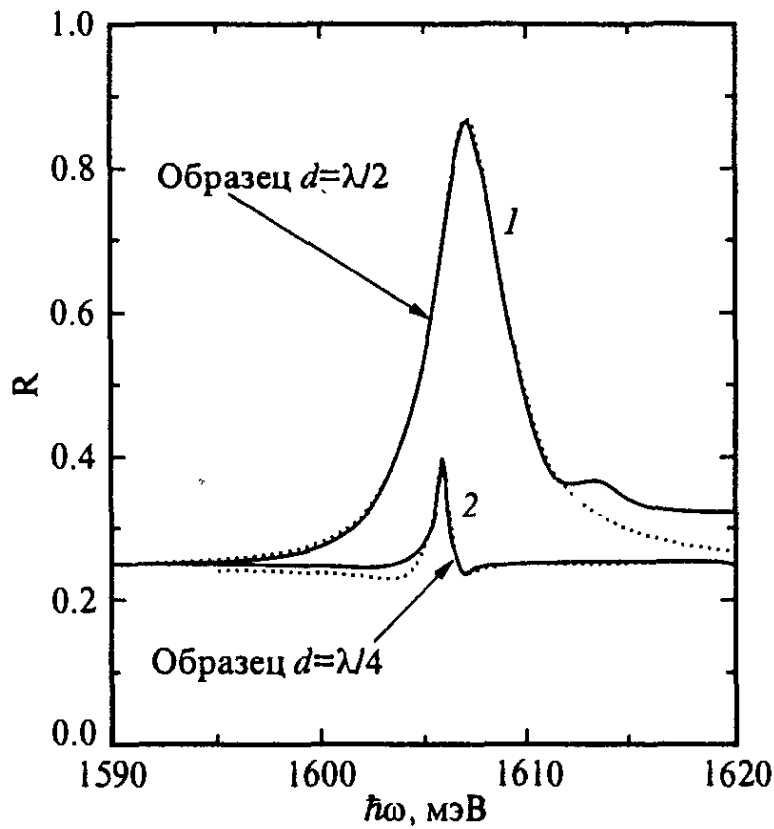


Рис. 35. Сравнение спектров оптического отражения в резонансной брэгговской (1) и антибрэгговской (2) структурах с десятью квантовыми ямами CdTe/Cd<sub>0.87</sub>Zn<sub>0.13</sub>Te.

Сплошные кривые — эксперимент; пунктирные — расчет. Ширина покрывающего слоя равна половине длины волны света на частоте экситонного резонанса  $e1-hh1(1s)$ ; температура  $T = 1.7$  К; падение света нормальное [32].

ямами GaAs/AlAs. Структура содержала 30 периодов, каждый период состоял из четырех слоев: из узкой и широкой ям шириной соответственно  $a_N = 26$  Å и  $a_W = 68$  или 102 Å, а также из двух одинаковых барьеров с шириной  $b = 102$  Å. Представленные на рисунке области частот включают резонансные частоты экситонов  $e1-hh1(1s)$  и  $e1-lh1(1s)$  в широкой яме. Видно, что для исследованных гетероструктур амплитуды резонансных особенностей в спектрах  $R(\omega)$ ,  $T(\omega)$ ,  $A(\omega)$  сопоставимы по порядку величины.

Наличие в структуре узких ям позволило исследовать влияние двумерных электронов на экситонные спектры. Пунктирные кривые измерены при дополнительном освещении образца с энергией кванта 2.41 эВ, превышавшей край поглощения в узкой яме. В результате в узких ямах происходило фотовозбуждение электронов и дырок. Фотоэлектроны, эффективная масса которых мала, быстро туннелировали в широкие ямы и накапливались там. Тяжелые дырки, туннелирование которых затруднено, накапливались в узких ямах. Как видно из рис. 36, присутствие свободных электронов в широких ямах вызывает

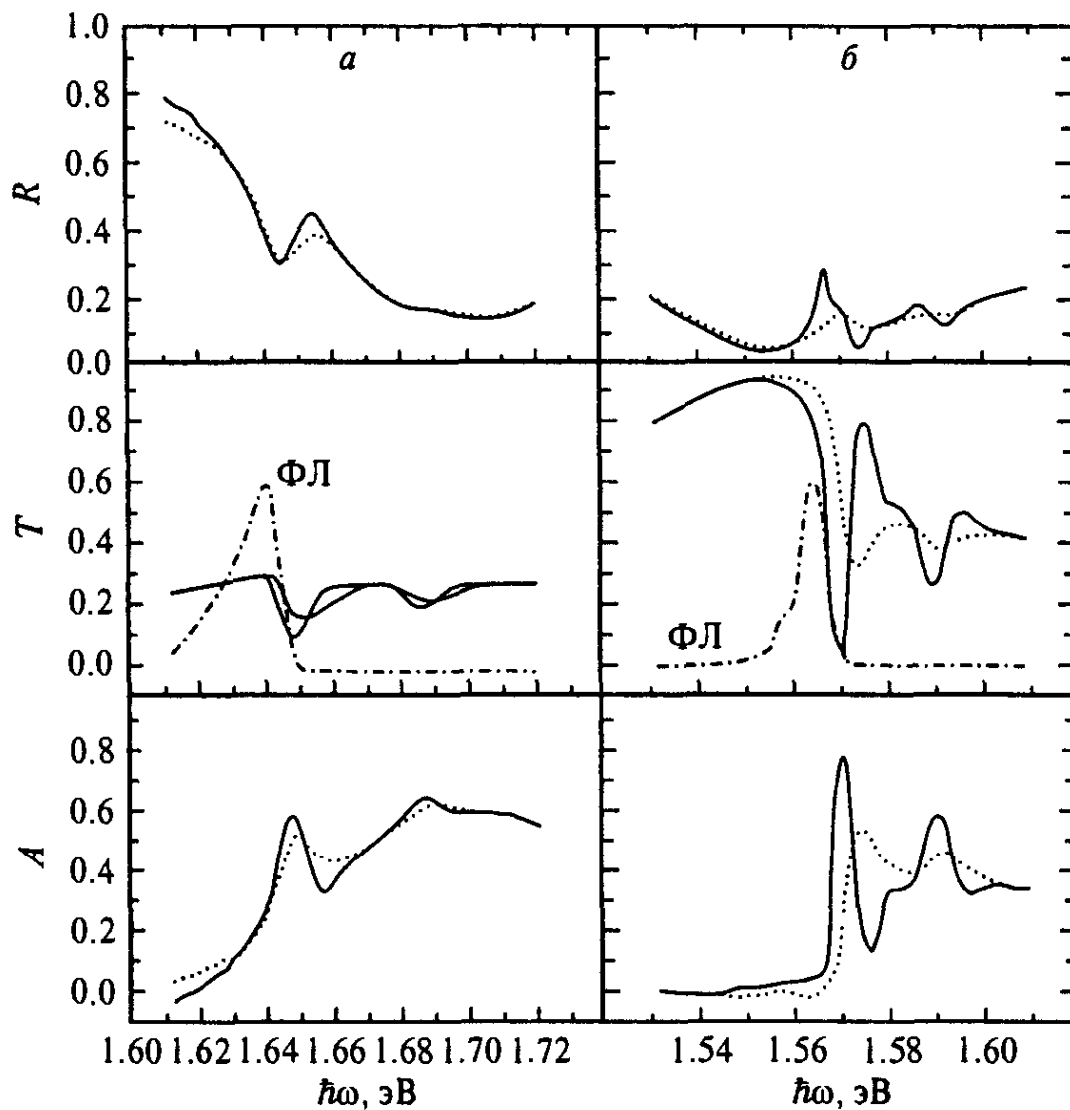


Рис. 36. Спектры отражения ( $R$ ), пропускания ( $T$ ) и поглощения ( $A$ ) в гетероструктуре GaAs/AlAs с 30 периодами, состоящими из двух квантовых ям шириной  $L_N = 26 \text{ \AA}$  и  $L_W = 68 \text{ \AA}$  (а) или  $102 \text{ \AA}$  (б) и двух барьеров, каждый шириной  $102 \text{ \AA}$ . Ширина покрывающего слоя из GaAs составляла  $100 \text{ \AA}$ .

Сплошные кривые измерены без дополнительной подсветки; пунктирные — при фотовозбуждении образца излучением с энергией кванта  $2.41 \text{ эВ}$ ; штрихпунктирные кривые — спектры фотолюминесценции, помеченные аббревиатурой ФЛ [33].

подавление экситонных эффектов: амплитуда резонансных особенностей уменьшается и одновременно они заметно уширяются.

Структуры со сверхрешетками. Спектры наклонного отражения света проиллюстрированы на примере гетероструктуры со сверхрешеткой (рис. 37). Запишем амплитудный коэффициент отражения от системы в целом в виде суммы

$$r = r_{01} + r', \quad (3.193)$$

где  $r_{01}$  и  $r'$  — коэффициенты отражения от внешней границы «вакуум—барьер» и от сверхрешетки. Тогда коэффициент отражения по потоку будет состоять из трех слагаемых:

$$R = |r_{01}|^2 + 2r_{01} \operatorname{Re}(r') + |r'|^2.$$

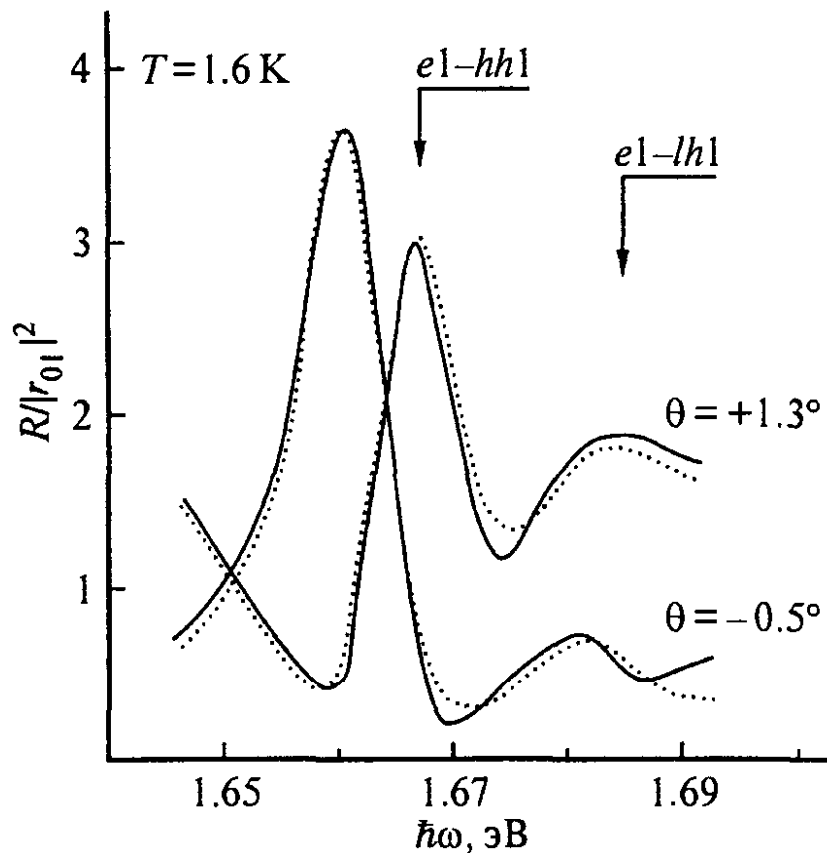


Рис. 37. Спектры оптического отражения от структуры со сверхрешеткой GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As, измеренные при двух углах наклонного падения, близких к углу Брюстера [34]. (Через  $\theta$  обозначена разность  $\theta_0 - \theta_{Br}$ ).

При большом нерадиационном затухании третье слагаемое несущественно и главный вклад в резонансный контур вносит второе слагаемое. Для света  $p$ -поляризации коэффициент отражения  $r_{01}$  описывается формулой

$$r_{01}^p = - \frac{(\epsilon_b - 1)(\epsilon_b \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)}{(\sqrt{\epsilon_b - \sin^2 \theta_0} + \epsilon_b \cos \theta_0)^2}, \quad (3.194)$$

где  $\theta_0$  — угол падения из вакуума. Величина  $r_{01}^p$  меняет знак при угле Брюстера  $\theta_{Br} = \arctg \sqrt{\epsilon_b}$ , где она обращается в ноль. Следовательно, в узкой области углов  $\theta_0 \approx \theta_{Br}$ , в пределах которой коэффициент  $r'$  можно считать неизменным, должна происходить инверсия резонансного контура отражения: максимумы сменяются на минимумы, а минимумы — на максимумы. Два спектра на рис. 37, снятые при  $\theta_0 = \theta_{Br} + 1.3^\circ$  и  $\theta_0 = \theta_{Br} - 0.5^\circ$ , демонстрируют предсказанный эффект инверсии.

### 3.5.3. Квантовые микрорезонаторы

Естественным способом усиления взаимодействия света с твердым телом является настройка на резонансные условия возбуждения. Размерное квантование экситонов в полупроводниковых наноструктурах приводит к дополнительному возрастанию резонансного локального отклика. Квантование электромагнитного поля в микрорезонаторе со встроенной квантовой ямой открыло путь для дальнейшего значительного увеличения коэффициента экситон-фотонной связи. Оптический микрорезонатор представляет собой активный слой  $B$  с показателем преломления  $n_b$ , заключенный между совершенными оптическими зеркалами (рис. 38). В качестве зеркал используются рас-

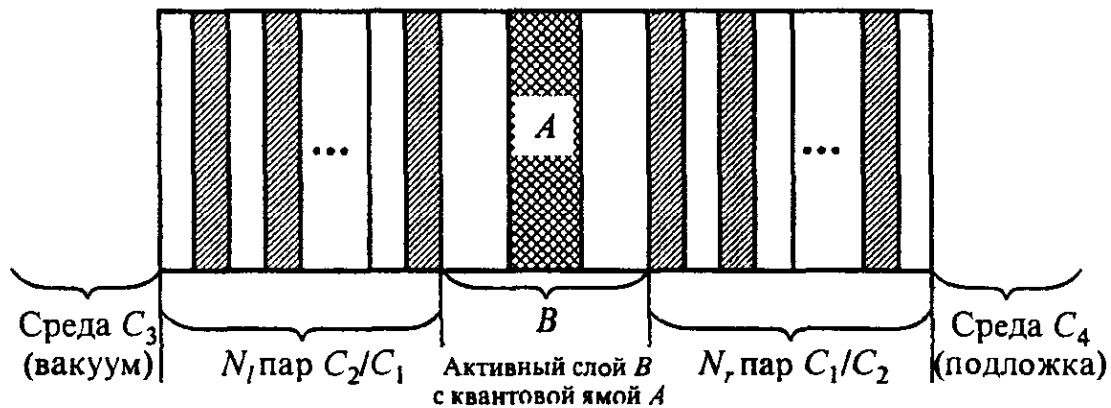


Рис. 38. Схематическое изображение квантового микрорезонатора.

пределенные брэгговские отражатели, состоящие из достаточно большого числа чередующихся слоев  $C_1$  и  $C_2$  с показателями преломления  $n_1$ ,  $n_2$  и ширинами  $a_1$ ,  $a_2$ , удовлетворяющими условиям

$$n_1 \frac{\bar{\omega}}{c} a_1 = n_2 \frac{\bar{\omega}}{c} a_2 = \frac{\pi}{2}, \quad (3.195)$$

где  $\bar{\omega}$  — задаваемая изначала резонансная частота фотонной моды. В дальнейшем для определенности будем считать, что показатель преломления  $n_2 > n_1$ . Заметим, что в отличие от резонансных брэгговских структур, рассмотренных ранее, здесь показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$  предполагаются не зависящими от частоты. Ширина активного слоя  $L_b$  составляет целое число полуволн  $\bar{\lambda}/2$ , где  $\bar{\lambda} = 2\pi(c/\bar{\omega}n_b)$ . В квантовом микрорезонаторе в середину активной области помещается одна или несколько квантовых ям с резонансной частотой экситона  $\omega_0$ , близкой к частоте  $\bar{\omega}$ .

**Двухосцилляторная модель квантового микрорезонатора.** Пусть электрическое поле оптической моды имеет пучность в

центре активного слоя, и пусть там же находится квантовая яма  $A$ . Анализ связанных экситон-фотонных состояний в таком микрорезонаторе можно проводить в двухосцилляторной модели, рассматривая в качестве двух переменных электрическое поле  $E(t)$  в квантовой яме и среднюю поляризацию  $P(t) = a^{-1} \int dz P(z, t)$ , индуцируемую квазидвумерным экситоном. Величины  $P(t)$  и  $E(t)$  удовлетворяют стандартной системе уравнений для связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} P(t) + \omega_0^2 P(t) + 2\Gamma \frac{d}{dt} P(t) &= q_1 E(t), \\ \frac{d^2}{dt^2} E(t) + \bar{\omega}^2 E(t) + 2\bar{\gamma} \frac{d}{dt} E(t) &= q_2 P(t), \end{aligned}$$

где  $\Gamma$  — нерадационное затухание квазидвумерного экситона;  $\bar{\gamma}$  — затухание фотонной моды, определяемое неидеальной отражательной способностью оптических зеркал. Собственные решения ищем в виде экспоненциальных функций  $P(t) = Pe^{-i\omega t}$ ,  $E(t) = Ee^{-i\omega t}$ . Если затухания  $\Gamma$ ,  $\bar{\gamma}$  и разность затравочных частот  $\omega_0 - \bar{\omega}$  малы по сравнению с самими этими частотами, система уравнений для амплитуд упрощается:

$$(\omega_0 - \omega - i\Gamma)P = \gamma_1 E; \quad (3.196a)$$

$$(\bar{\omega} - \omega - i\bar{\gamma})E = \gamma_2 P, \quad (3.196b)$$

где вместо  $q_1$ ,  $q_2$  введены другие параметры:  $\gamma_j = q_j / (2\bar{\omega})$ . Один из них находится из сравнения с уравнением (3.150) или (3.192) для средней поляризации в квантовой яме

$$\gamma_1 = \xi \Gamma_0. \quad (3.197)$$

Проанализируем случай совпадающих частот  $\omega_0$  и  $\bar{\omega}$ . В режиме слабой экситон-фотонной связи, когда  $(\Gamma - \bar{\gamma})^2 > 4\gamma_1\gamma_2$ , имеем для собственных частот:

$$\omega_{\pm} = \bar{\omega} - i \frac{\Gamma + \bar{\gamma}}{2} \pm i \tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\Gamma - \bar{\gamma}}{2}\right)^2 - \gamma_1\gamma_2},$$

т. е. их вещественные части совпадают, а мнимые — различаются. В режиме сильной связи, когда  $(\Gamma - \bar{\gamma})^2 < 4\gamma_1\gamma_2$ , у собственных частот различаются вещественные части:

$$\omega_{\pm} = \bar{\omega} \pm \tilde{\Omega} - i \frac{\Gamma + \bar{\gamma}}{2}, \quad \tilde{\Omega} = \sqrt{\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{\Gamma - \bar{\gamma}}{2}\right)^2}. \quad (3.198)$$

В последнем случае разность  $\omega_+ - \omega_-$  называется *расщеплением Раби*. Отметим, что обычные структуры с изолированными квантовыми ямами являются открытыми системами, в которых двумерные возбуждения — экситоны — взаимодействуют с трехмерными фотонами, перенормировка экситонной частоты мала и экситон-фотонное взаимодействие приводит в основном к радиационному затуханию экситона. В квантовом микрорезонаторе с качественными оптическими зеркалами как экситонные, так и фотонные состояния размерно квантованы в направлении главной оси структуры. Поэтому в этом случае возможна сильная перенормировка энергии исходных («голых») частиц. В реальных полупроводниковых квантовых микрорезонаторах расщепление Раби составляет несколько миллиэлектронвольт, а в некоторых случаях даже превышает 10 мэВ. Перейдем теперь к установлению связи между  $\bar{\gamma}, \gamma_2$  и параметрами квантового микрорезонатора.

**Отражение от брэгговского зеркала.** Обозначим в виде

$$r_m = \sqrt{R_m} e^{i\psi_m}$$

коэффициент отражения при падении света слева на брэгговское зеркало

$$C_3 (C_1/C_2) \dots (C_1/C_2) C_4,$$

включающее  $N$  двойных слоев  $C_1/C_2$  и помещенное между полубесконечными средами  $C_3$  и  $C_4$  с показателями преломления  $n_3$  и  $n_4$ . Покажем, что в окрестности резонансной частоты фотонной моды  $\bar{\omega}$  коэффициент отражения по потоку  $R_m = |r_m|^2$  и фаза  $\psi_m$  описываются приближенными формулами

$$R_m \approx 1 - 4 \frac{n_4}{n_3} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{2N},$$

(3.199)

$$\psi_m \approx \frac{\pi}{n_3} \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1} \frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}},$$

где учтено, что  $n_2 > n_1$ .

Введем столбец  $\hat{E}$ , компонентами которого являются электрическое поле  $E$  и величина  $\dot{E} \equiv k_1^{-1} dE/dz$  на границе между левой средой  $C_3$  и первым слоем  $C_1$ , где  $k_1 = (\omega/c)n_1$ . Для матриц переноса  $\hat{T}_j$  через слои  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) мы используем здесь представление (3.174). В этом представлении матрица переноса  $\hat{T} = \hat{T}_2 \hat{T}_1$  через двойной слой  $C_1/C_2$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \phi_1 - \frac{n_1}{n_2} \sin \phi_2 \sin \phi_1 & \cos \phi_2 \sin \phi_1 + \frac{n_1}{n_2} \sin \phi_2 \cos \phi_1 \\ -\cos \phi_2 \sin \phi_1 - \frac{n_2}{n_1} \sin \phi_2 \cos \phi_1 & \cos \phi_2 \cos \phi_1 - \frac{n_2}{n_1} \sin \phi_2 \sin \phi_1 \end{bmatrix},$$

где  $\phi_j = (\omega/c) n_j a_j$ . Выражение (3.199) для  $R_m$  можно рассчитывать в нулевом приближении по  $\omega - \bar{\omega}$ , т. е. при  $\omega = \bar{\omega}$ . Согласно (3.195), толщины слоев  $a_j$  выбраны так, что при  $\omega = \bar{\omega}$  фазы  $\phi_j$  равны  $\pi/2$ , а  $\cos \phi_j = 0$  и  $\sin \phi_j = 1$ . В этом случае матрица переноса через период  $C_1/C_2$  диагональна:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} -\frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & -\frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix}. \quad (3.200)$$

Электрическое поле на границе между крайним правым слоем  $C_2$  и полубесконечной средой  $C_4$  получается умножением матрицы  $\hat{T}^N$  на столбец  $\hat{E}$ . По определению коэффициентов отражения ( $r_m$ ) и пропускания ( $t_m$ ) имеем:

$$E_0 \begin{bmatrix} 1 + r_m \\ i(n_3/n_1)(1 - r_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ \dot{E} \end{bmatrix},$$

$$E_0 t_m \begin{bmatrix} 1 \\ i(n_4/n_1) \end{bmatrix} = (-1)^N \begin{bmatrix} (n_1/n_2)^N E \\ (n_2/n_1)^N \dot{E} \end{bmatrix},$$

где  $E_0$  — амплитуда падающей волны. Приравнивая отношения  $\dot{E}/E$ , получаемые из одного и другого уравнений, находим:

$$i \frac{n_4}{n_1} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{2N} i \frac{n_3}{n_1} \frac{1 - r_m}{1 + r_m}. \quad (3.201)$$

Отсюда следует, что при  $(n_1/n_2)^N \ll 1$  амплитудный коэффициент отражения  $r_m(\omega = \bar{\omega})$  равен приблизительно  $1 - 2(n_4/n_3)(n_1/n_2)^{2N}$ , откуда и получается выражение (3.199) для  $R_m$ .

Согласно (3.201), фаза  $\psi_m$  при  $\omega = \bar{\omega}$  равна нулю и нулевой член разложения  $\psi_m$  по  $\omega - \bar{\omega}$  отсутствует. Поэтому расчет первого члена можно проводить, устремив число периодов к бесконечности и оставив из двух линейно независимых решений в



брегговском зеркале лишь то, которое убывает с ростом  $z$ . В первом порядке по  $\omega - \bar{\omega}$  у матрицы переноса  $\hat{T}$  появляются недиагональные компоненты

$$T_{12} = -\frac{\pi}{2} \frac{n_1 + n_2}{n_2} \frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}, \quad T_{21} = \frac{\pi}{2} \frac{n_1 + n_2}{n_1} \frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}},$$

но диагональные компоненты не меняются, а значит, остаются неизменными и собственные числа  $-n_2/n_1$  и  $-n_1/n_2$  соответственно для решений, неограниченно нарастающих и убывающих с ростом номера пары  $C_1/C_2$ . Для убывающего решения величины  $E$  и  $\dot{E}$  связаны соотношением

$$T_{21}E + \left( T_{22} + \frac{n_1}{n_2} \right) \dot{E} = 0$$

или

$$\frac{\pi}{2} \frac{n_1 + n_2}{n_1} \frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}} E + \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1 n_2} \dot{E} = 0.$$

Коэффициент отражения находится из условия

$$i \frac{n_3}{n_1} \frac{1 - r_m}{1 + r_m} = \frac{\dot{E}}{E} = \frac{\pi}{2} \frac{n_2}{n_2 - n_1} \frac{\omega - \bar{\omega}}{\bar{\omega}},$$

которое и позволяет вывести выражение (3.199) для фазы  $\psi_m$ , справедливое в области частот, где эта фаза остается малой по сравнению с единицей. Выражение (3.199) для  $R_m$  применимо без изменений и для структуры, в которой слои  $C_1$  и  $C_2$  меняются местами, т. е. для структуры  $C_3 (C_2/C_1) \dots (C_2/C_1) C_4$ .

Заметим, что при  $N \rightarrow \infty$ , т. е. при  $R_m \rightarrow 1$ , равенство нулю фазы  $\psi_m$  при  $\omega = \bar{\omega}$  означает, что граничное условие, накладываемое на электрическое поле на левой и правой границах активного слоя, сводится к обращению в ноль производной  $dE/dz$ . Как отмечалось, отношение  $N_b = L_b (\bar{\lambda}/2)$ , толщины активного слоя к полуволне на частоте  $\bar{\omega}$ , есть целое число. При четном  $N_b$  указанному граничному условию отвечает решение с пучностью в центре ямы, а при нечетном  $N_b$  поле в центре имеет узел.

**Оптический микрорезонатор без квантовых ям.** Коэффициент отражения от микрорезонатора с однородным активным слоем, не содержащим квантовых ям, записывается в виде

$$r_{\mu} = r'_{ml} + \frac{t'_{ml} r_{mr} t_{ml}}{1 - r_{mr} r_{ml}}. \quad (3.202)$$

Здесь  $r_{mj}, r'_{mj}$  — коэффициенты отражения от левого ( $j = l$ ) или правого ( $j = r$ ) брэгговского зеркала при падении света со стороны активного слоя и из внешней среды соответственно; аналогичные обозначения  $t_{mj}, t'_{mj}$  введены для коэффициентов пропускания. Амплитуды всех световых волн, падающей, отраженной и прошедшей, соотнесены к центру активной области. Поэтому фаза  $\psi$  коэффициента  $r_{mj}$  отличается от фазы  $\psi_m$  в (3.199) на величину  $\psi_b = (\omega/c)n_b L_b$ . Напомним, что отношение  $N_b = L_b/(\bar{\lambda}/2)$ , толщины активного слоя к полуволне на частоте  $\bar{\omega}$ , есть целое число, которое в дальнейшем считается четным, чтобы электрическое поле имело в центре активного слоя пучность. Таким образом, для коэффициентов отражения  $r_{ml}$  и  $r_{mr}$ , входящих в формулу (3.202), имеем:

$$r_{mj} = \sqrt{R_{mj}} e^{i\psi}, \quad R_{mj} = 1 - 4 \frac{n_j}{n_b} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{2N_j}, \quad (3.203)$$

$$\psi = N_b \pi + n_b \frac{\bar{L} + L_b}{c} (\omega - \bar{\omega}), \quad \bar{L} = \frac{\pi c}{\bar{\omega} n_b^2} \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1},$$

где  $N_j$  — число парных слоев в левом и правом зеркалах;  $n_j$  — показатель преломления внешней среды  $S_3$  при  $j = l$  или  $S_4$  при  $j = r$ , а также введена характерная длина  $\bar{L}$ , определяемая контрастом показателей преломления  $n_1$  и  $n_2$ : чем больше контраст, тем слабее фаза  $\psi$  зависит от расстройки  $\omega - \bar{\omega}$ .

Первый член в правой части (3.202) описывает вклад в отражение от левого зеркала, как если бы правое зеркало отсутствовало и активный слой  $B$  был полубесконечным. Второй член возникает с учетом прохождения света внутрь активной области, отражения от правого зеркала и выхода назад; знаменатель учитывает процессы многократного отражения перед выходом излучения из активной области влево или вправо. Собственная частота микрорезонатора без квантовых ям находится из условия обращения в ноль этого знаменателя:

$$1 - r_{mr} r_{ml} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \sqrt{R_{mr} R_{ml}} e^{2i\psi} = 0,$$

чтобы линейный отклик  $r_{\mu}(\omega)$  имел полюс на этой частоте. Учтем, что  $N_b$  есть целое число, а величины  $1 - R_{mj}$  и

$\delta\psi = \psi - N_b \pi$  малы. Это позволяет использовать для  $\sqrt{R_{mj}}$  и  $\exp(2i\psi)$  приближенные выражения  $1 - (1 - R_{mj})/2$  и  $1 + 2i\delta\psi$ . В результате получаем:

$$1 - r_{mr}r_{ml} \approx \frac{1}{2}(1 - R_{ml}) + \frac{1}{2}(1 - R_{mr}) - 2in_b \frac{\bar{L} + L_b}{c}(\omega - \bar{\omega}). \quad (3.204)$$

Приравнивая это выражение нулю, приходим к уравнению для собственной частоты:

$$\bar{\omega} - \omega - i\bar{\gamma} = 0. \quad (3.205)$$

Здесь  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_l + \bar{\gamma}_r$ ,  $\bar{\gamma}_{l,r}$  — затухание фотонной моды, обусловленное выходом фотона влево или вправо:

$$\bar{\gamma}_j = \frac{1}{8}(1 - R_{mj})\bar{\Gamma}, \quad \bar{\Gamma} = \frac{2c}{n_b(\bar{L} + L_b)}. \quad (3.206)$$

Что касается вещественной части собственной частоты, то, согласно (3.205), она действительно совпадает с частотой  $\bar{\omega}$ , введенной при выборе толщины слоев  $C_1$ ,  $C_2$  и  $B$  в микрорезонаторе.

**Связь между полем и поляризацией в квантовом микрорезонаторе.** Согласно (3.150), электрическое поле, индуцируемое экситоном в квантовой яме, в центре ямы равно

$$E = \frac{i}{\xi} P, \quad (3.207)$$

где  $P$  — средняя экситонная поляризация, а безразмерный параметр  $\xi$  определен в (3.148). В квантовом микрорезонаторе излучаемая экситоном световая волна многократно отражается от брэгговских зеркал и значение электрического поля в центре ямы умножается на

$$1 + \frac{r_{mr}(1 + r_{ml}) + r_{ml}(1 + r_{mr})}{1 - r_{mr}r_{ml}} \approx \frac{4}{1 - r_{mr}r_{ml}}.$$

При выводе приближенного выражения для коэффициента усиления учтено, что, согласно (3.203), при четном  $N_b$  и малой расстройке  $\omega - \bar{\omega}$  коэффициент отражения  $r_{mj}$  близок к единице. Поэтому можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым и заменить числитель второго члена на 4. Таким образом, связь между  $E$  и  $P$  в квантовом микрорезонаторе принимает вид

$$E = \frac{4i}{\xi} \frac{P}{1 - r_{mr} r_{ml}}.$$

Используя приближенную формулу (3.204), можно переписать эту связь, придав ей форму уравнения (3.196б):

$$(\bar{\omega} - \omega - i\bar{\gamma})E = \frac{\bar{\Gamma}}{\xi} P.$$

Таким образом, параметр  $\gamma_2$  в (3.196б) равен  $\bar{\Gamma}/\xi$ , а произведение  $\gamma_1 \gamma_2$ , определяющее расщепление Раби, с учетом (3.197) превращается в  $\Gamma_0 \bar{\Gamma}$ .

Для расчета коэффициента отражения от квантового микро-резонатора нужно добавить в уравнение (3.196б) поле от внешнего источника:

$$(\bar{\omega} - \omega - i\bar{\gamma})E = \bar{\Gamma} \left( \frac{1}{\xi} P - i \frac{t'_{ml}}{2} E_0 \right), \quad (3.208)$$

где  $E_0$  — амплитуда световой волны, падающей на микро-резонатор слева. Электрическое поле волны, выходящей через левое или правое зеркало, связано с полем в центре ямы простым соотношением

$$E_j = \frac{t_{mj}}{2} E. \quad (3.209)$$

Система уравнений (3.196а, 3.208, 3.209) является замкнутой и

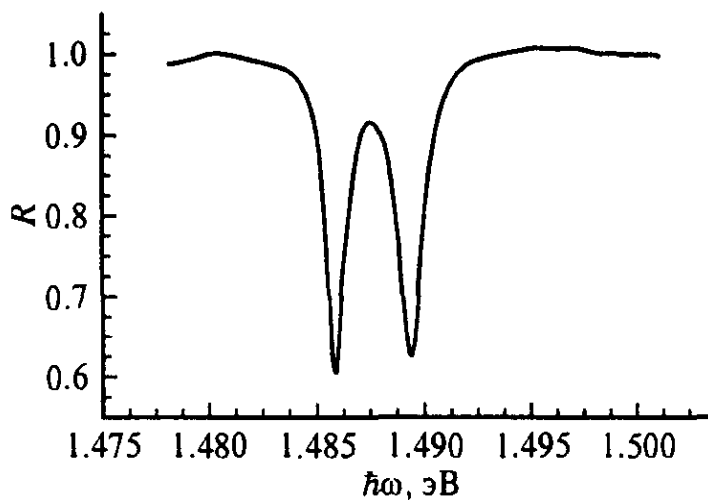


Рис. 39 Спектр оптического отражения от квантового микро-резонатора с активной областью шириной  $\lambda$ , в центр которой помещена квантовая яма [35].

позволяет рассчитывать оптические спектры в квантовом микро-резонаторе. В этих спектрах на собственных частотах квазидвумерных поляритонов  $\omega_{\pm}$  имеются особенности в виде провалов (в отражении) или пиков (в пропускании или поглощении).

**Эксперимент.** На рис. 39 представлен спектр отражения от

полупроводникового микрорезонатора с одиночной квантовой ямой в центре активного слоя шириной  $\bar{\lambda}$ . Реализован случай совпадающих резонансных частот экситона и фотонной моды:  $\omega_0 = \bar{\omega}$ . На частотах  $\omega_{\pm}$ , определенных согласно (3.198), коэффициент отражения  $R$  имеет минимумы. Видно, что расщепление Раби составляет  $\sim 3$  мэВ и существенно превышает ширину спектральных провалов  $\omega_+$  и  $\omega_-$ .

## **4. ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ НАНОСТРУКТУР**

В данной главе описаны: принципы оптической ориентации и выстраивания свободных носителей и экситонов; эффекты магнитного поля; поляризованная люминесценция и тонкая структура экситонных уровней; спектр излучения локализованных экситонов в режиме многократных туннельных прыжков.

### **4.1. Фотолюминесценция полупроводников**

Спектроскопия фотолюминесценции твердых тел методически основана на измерении спектра вторичного свечения при фиксированном спектральном составе возбуждающего света и на измерении спектра возбуждения фотолюминесценции, когда приемник регистрирует вторичное излучение в узком спектральном интервале и измеряется зависимость сигнала от частоты возбуждающего света. В первом методе измеряемый спектр определяется главным образом силой осциллятора и временем жизни излучающих состояний, энергетически расположенных вблизи края фундаментального поглощения, и косвенно процессами энергетической релаксации «горячих» возбужденных состояний. Во втором методе в первую очередь получается информация о спектре и силе осциллятора (но не о времени жизни) электронных возбуждений в энергетической области выше края поглощения. Вклад в фотолюминесценцию полупроводников могут вносить различные механизмы излучательной рекомбинации, такие как «зона—зона», «зона—примесь», «донор—акцептор», с участием фонона, излучение свободных, связанных или локализованных экситонов, а также экситон-поляритонная и биекситонная рекомбинации. Фотолюминесценция структур с квантовыми ямами имеет свои характерные особенности. В частности, низкотемпературная люминесценция нелегированных квантовых ям обычно связывается с излучательной рекомбинацией экситонов, локализованных на шероховатостях интерфейсов и флуктуациях состава. Дело в том, что в реальности интер-

фейсы между материалами ямы и барьера, соответственно  $A$  и  $B$ , никогда не являются идеально гладкими в атомном масштабе. Даже при выращивании образца с использованием технологически наиболее развитого метода молекулярно-пучковой эпитаксии интерфейс характеризуется островковой структурой с высотой в один мономолекулярный слой. Несовершенства интерфейсов изменяют плотность экситонных состояний и приводят к формированию так называемого хвоста локализованных состояний. Если по крайней мере один из композиционных материалов является твердым раствором, то флуктуации состава также вносят вклад в беспорядок, а значит, и в формирование локализованных экситонных состояний. Если прыжки между локализованными состояниями неэффективны, то форма полосы фотолюминесценции определяется плотностью этих состояний. В режиме многократных прыжков заселенность хвоста экситонных состояний, а значит, и спектр фотолюминесценции формируются в результате конкуренции между экситонной рекомбинацией и индуцированным акустическими фононами переходом с верхних на нижние локализованные уровни (см. п. 4.5).

При умеренно высоких температурах экситоны делокализуются и характеризуются квазиравновесным больцмановским распределением

$$f(K_{\parallel}) = C \exp(-\hbar^2 K_{\parallel}^2 / 2 M k_B T),$$

где  $C \propto T^{d/2} N$ ;  $N$  — концентрация экситонов;  $d = 2$  для квантовых ям и  $d = 1$  для квантовых проволок. Нужно учитывать, что излучать свет могут только экситоны с волновым вектором  $K_{\parallel} < (\omega_0 / c) \sqrt{\epsilon_b}$ , тогда как экситоны с  $K_{\parallel} > (\omega_0 / c) \sqrt{\epsilon_b}$  оптически неактивны, т. е. для них излучательное время жизни  $\tau_r \rightarrow \infty$ . Следовательно, эффективное излучательное время жизни определяется выражением

$$\langle \tau_r^{-1} \rangle = \frac{\int dK_{\parallel} \tau_r^{-1}(K_{\parallel}) f(K_{\parallel})}{\int dK_{\parallel} f(K_{\parallel})} \propto \frac{C}{N} \propto T^{d/2}. \quad (4.1)$$

## 4.2. Оптическая ориентация свободных носителей

### 4.2.1. Поляризационные параметры световой волны

Перед тем как рассмотреть один за другим принципы оптической ориентации, следует напомнить, каким образом описывается поляризация поперечной квазимонохроматической электромагнитной волны с электрическим вектором

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(t)e^{i\omega t},$$

где  $\mathbf{E}(t)$  — медленно изменяющаяся во времени амплитуда; предполагается также, что вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен направлению распространения (ось  $z$ , или 3). Введем поляризационную матрицу плотности

$$d_{\alpha\beta} = \langle E_{0,\alpha} E_{0,\beta}^* \rangle \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Определим интенсивность света как  $I = \langle |E_1|^2 + |E_2|^2 \rangle$ , тогда матрицу плотности можно представить в виде

$$\hat{d} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 + P_l & P_{l'} - iP_c \\ P_{l'} + iP_c & 1 - P_l \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Введенные здесь параметры Стокса:

$$P_c = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-}, \quad P_l = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}, \quad P_{l'} = \frac{I_{1'} - I_{2'}}{I_{1'} + I_{2'}},$$

определяют соответственно степени циркулярной поляризации, линейной поляризации в осях 1, 2 и линейной поляризации в осях 1', 2', повернутых вокруг оси 3 на угол  $45^\circ$  относительно осей 1, 2.

Матрица плотности (4.2) записана в базисе линейно поляризованных компонент  $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2$ , где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — единичные векторы вдоль осей 1 и 2. Заметим, что в базисе циркулярно поляризованных компонент:

$$\mathbf{E} = E_+ \mathbf{e}_+ + E_- \mathbf{e}_-, \quad \mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)/\sqrt{2},$$

матрица плотности имеет вид

$$\hat{d}^{(c)} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 + P_c & P_l - iP_{l'} \\ P_l + iP_{l'} & 1 - P_c \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Действительно, выразим линейно поляризованные орты через циркулярно поляризованные:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-), \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-),$$

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \frac{1-i}{2}\mathbf{e}_+ + \frac{1+i}{2}\mathbf{e}_-.$$



Тогда, например, в случае  $E \parallel e_1$  или  $E \parallel e_1'$  получаем соответственно

$$\hat{d}^{(c)} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 4.2.2. Принципы оптической ориентации спинов свободных носителей

Эффективным методом бесконтактного неразрушающего исследования зонных и кинетических параметров полупроводников является оптическая ориентация свободных носителей и экситонов. Суть этого метода заключается в наблюдении зависимости поляризации фотолюминесценции от состояния поляризации возбуждающего света. Вначале мы сформулируем основные принципы оптической ориентации спинов свободных носителей, а затем обсудим особенности поляризованной люминесценции экситонов.

**Принцип 1.** При межзонном оптическом возбуждении циркулярно поляризованным светом угловые моменты  $\sigma_+$  (или  $\sigma_-$ ) фотонов преобразуются в угловые моменты (или спины) свободных носителей.

В условиях стационарного возбуждения уравнения кинетики для плотностей  $n_+$  и  $n_-$  электронов со спином  $\uparrow$  (или  $+1/2$ ) и  $\downarrow$  (или  $-1/2$ ) записываются в виде:

$$\frac{n_+}{\tau_0} + \frac{1}{2\tau_s}(n_+ - n_-) = G_+,$$

$$\frac{n_-}{\tau_0} + \frac{1}{2\tau_s}(n_- - n_+) = G_-.$$

Здесь  $G_{\pm}$  — скорости фотогенерации;  $\tau_0$  — время жизни фотоэлектронов в зоне проводимости;  $\tau_s$  — их время спиновой релаксации. Удобно ввести обозначения:  $n = n_+ + n_-$  для полной концентрации электронов;  $G = G_+ + G_-$  для полной скорости генерации;  $s_z = (n_+ - n_-)/2$  для среднего суммарного спина электронов;

$$p = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-}$$

для степени электронной спиновой поляризации и  $S_z = s_z / n = p/2$  для среднего спина. Тогда решение двух уравне-

ний кинетики можно представить в виде  $n = G\tau_0$  и  $p = p_0(T/\tau_0)$ , где

$$p_0 = \frac{G_+ - G_-}{G_+ + G_-}; \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_s}.$$

Время  $T$  называется *временем жизни ориентированного спина фотоэлектрона*. Отсюда можно сформулировать второй принцип оптической ориентации спинов свободных носителей.

Принцип 2 гласит: если время жизни фотоэлектрона  $\tau_0$  не слишком длинное по сравнению со временем спиновой релаксации  $\tau_s$ , то ориентированные по спину электроны сохраняют спиновую поляризацию (по крайней мере, частично) при стационарном возбуждении:

$$S_z = \frac{\tau_s}{\tau_0 + \tau_s} S_z^0, \quad S_z^0 = \frac{1}{2} p_0. \quad (4.4)$$

Начальная степень спиновой поляризации  $p_0$  пропорциональна  $P_c^0$  (в дальнейшем  $P_c^0$ ,  $P_l^0$  и  $P_l^0$  — параметры Стокса исходного излучения):  $p_0 = \alpha P_c^0$ . Коэффициент  $\alpha$  зависит от правил отбора: для межзонных переходов  $\Gamma_8 \rightarrow \Gamma_6$  в объемных полупроводниках типа GaAs  $\alpha = -1/2$ , а для оптических переходов  $hh1 \rightarrow e1$  в структурах с квантовыми ямами на основе GaAs  $\alpha = -1$ .

Принцип 3. Благодаря тем же правилам отбора при межзонных переходах фотолюминесценция, обусловленная излучательной рекомбинацией поляризованных по спину фотоносителей, (частично) циркулярно поляризована:

$$P_c = \alpha p = \alpha^2 P_c^0 \frac{T}{\tau_0}. \quad (4.5)$$

Принцип 4. Поперечное магнитное поле приводит к деполаризации фотолюминесценции. Уравнения баланса для величин  $n$  и  $s$  в поперечном магнитном поле могут быть записаны в виде:

$$\frac{n}{\tau_0} = G, \quad \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_s} \right) s + s \times \Omega_L = \dot{s}, \quad (4.6)$$

где, например,  $\dot{s}_z = (G_+ - G_-)/2$  и т. п.;  $\Omega_L$  — частота ларморовой прецессии электронного спина в магнитном поле  $B$ . Эти уравнения выводятся из уравнения для спиновой матрицы плотности электронов:

$$\frac{\hat{\rho}}{\tau_0} - \left( \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right)_{\text{sr}} + \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_B, \hat{\rho}] = \hat{G},$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n + s_z & s_x - i s_y \\ s_x + i s_y & n - s_z \end{bmatrix},$$

$$-\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{sr}} = \frac{1}{2\tau_s} \begin{bmatrix} \rho_{11} - \rho_{22} & 2\rho_{12} \\ 2\rho_{21} & \rho_{22} - \rho_{11} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что  $\rho_{11} = \rho_{1/2, 1/2}$ ,  $\rho_{12} = \rho_{1/2, -1/2}$  и т. д. Здесь использованы обозначения:  $\mathcal{H}_B = g\mu_0 \sigma \mathbf{B}/2$  — оператор (зеemanовского) взаимодействия электронного спина с полем  $\mathbf{B}$ ;  $\mu_0$  — магнетон Бора;  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) — матрицы Паули;  $g$  — эффективный фактор Ланде, или эффективный  $g$ -фактор электрона;  $\text{sr}$  означает *spin relaxation* (спиновая релаксация). Заметим, что в общем случае нужно вводить тензор  $g$ -факторов  $g_{ij}$  и записывать  $\mathcal{H}_B$  в виде суммы  $(\mu_0/2) \sum_{ij} \sigma_i g_{ij} B_j$ . В частном случае изотропного  $g$ -фактора частота ларморовой прецессии направлена по вектору  $\mathbf{B}$  и равна  $g\mu_0 \mathbf{B}/\hbar$ .

Пусть  $\mathbf{B} \parallel x$ , тогда  $\mathcal{H}_B = \hbar\Omega_L \sigma_x/2$  и

$$\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_B, \hat{\rho}] = \frac{i}{2} \Omega_L \begin{bmatrix} \rho_{21} - \rho_{12} & \rho_{22} - \rho_{11} \\ \rho_{11} - \rho_{22} & \rho_{12} - \rho_{21} \end{bmatrix}.$$

Векторное уравнение для  $\mathbf{s}$  эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{s_x}{T} = \dot{s}_x, \quad \frac{s_y}{T} + \Omega_L s_z = \dot{s}_y, \quad \frac{s_z}{T} - \Omega_L s_y = \dot{s}_z. \quad (4.7)$$

При нормальном падении  $\dot{s}_x = \dot{s}_y = 0$  и

$$s_z(B) = \frac{s_z(0)}{1 + (\Omega_L T)^2}, \quad s_y(B) = -\frac{\Omega_L T}{1 + (\Omega_L T)^2} s_z(0), \quad s_x = 0. \quad (4.8)$$

Видно, что в поперечном магнитном поле средний электронный спин поворачивается вокруг  $\mathbf{B}$  и деполяризуется. Это так называемый эффект Ханле.

### 4.3. Поляризованная люминесценция и тонкая структура экситонных уровней

Рассмотрим экситон, образованный из электрона в зоне проводимости симметрии  $D_c$  и дырки в валентной зоне симметрии  $D_v$ . Волновые функции  $1s$ -экситона преобразуются по представлению  $D_c \times D_v$ . В общем случае это представление приводимо и может быть разложено на неприводимые представления. Обменное взаимодействие между электроном и дыркой, возникающее в теории экситонов Ванье—Мотта при учете поправок к приближению эффективной массы, приводит к частичному снятию вырождения основного состояния экситона и расщепляет его на соответствующие неприводимые представления. В объемном полупроводнике со структурой цинковой обманки основное состояние экситона  $\Gamma_6 \times \Gamma_8$  восьмикратно вырождено. Спиновые индексы плавной огибающей волновой функции пробегают значения  $s = 1/2$  и  $m = 3/2, \pm 1/2$ . Обменное взаимодействие расщепляет это состояние на три терма:  $\Gamma_6 \times \Gamma_8 = \Gamma_{12} + \Gamma_{15} + \Gamma_{25}$ . В схеме сложения моментов  $s = 1/2$  и  $j = 3/2$  триплетный уровень  $\Gamma_{15}$  соответствует полному угловому моменту  $J = 1$  с проекциями  $M = 1, 0, -1$ . Термы  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{25}$  соответствуют угловому моменту  $J = 2$  и сдвинуты на некоторую величину  $\Delta_0$  по отношению к терму  $\Gamma_{15}$ . Расщепление между термами  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{25}$  отлично от нуля в меру несферичности валентной зоны  $\Gamma_8$ .

Основное состояние  $1s$ -экситона в квантовой яме GaAs/AlAs (001) четырехкратно вырождено. В обозначениях неприводимых представлений точечной группы  $D_{2d}$  имеем:  $\Gamma_6 \times \Gamma_6 = A_1 + A_2 + E$ . Следовательно, с учетом обменного взаимодействия это состояние расщепляется на радиационный дублет  $E$  с проекциями  $M = s + m = \pm 1$  углового момента на ось  $z$  и термы  $A_1, A_2$  ( $s = \pm 1/2, m = \pm 3/2$ ). Последние являются симметризованной и антисимметризованной линейными комбинациями состояний с проекцией момента  $\pm 2$ . Расщепление между ними мало, обычно им пренебрегают и используют базис  $|\pm 2\rangle$ . Состояния  $\pm 1$  дипольно активны в поляризации  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  соответственно; оптические переходы в состояния  $|\pm 2\rangle$  запрещены.

Принцип 5. Экситоны аналогично свободным носителям можно ориентировать при циркулярно поляризованном возбуждении. При возбуждении линейно поляризованным светом осциллирующий дипольный момент экситонов выстроен в плоскости поляризации (оптическое выстраивание).

При описании стационарной заселенности четырех подуровней: экситона  $e1\Gamma-hh1$  в сверхрешетке GaAs/AlAs типа I, экситона  $e1X-hh1$  в сверхрешетке GaAs/AlAs типа II и  $A$ -экситона,

или экситона  $\Gamma_7 - \Gamma_9$ , в объемном  $\text{CdS}_{1-x}\text{Se}_x$  — применим общий подход.

В дальнейшем будем использовать в качестве базисных состояния  $|m\rangle_0$  с заданной проекцией полного спина  $m=1, -1, 2, -2$ . В этом базисе матричные элементы оптического возбуждения имеют вид

$$M_{\pm 1} = M_0 (e_x \mp i e_y), \quad M_{\pm 2} = 0, \quad (4.9)$$

а обменное взаимодействие (*exchange interaction*) между электроном и дыркой в экситоне описывается матрицей

$$\hat{H}_{\text{exch}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta_0 & e^{i\Phi_2} \delta_2 & 0 & 0 \\ e^{-i\Phi_2} \delta_2 & \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_0 & e^{i\Phi_1} \delta_1 \\ 0 & 0 & e^{-i\Phi_1} \delta_1 & -\delta_0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Здесь  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации света; используется система координат с осью  $z$ , ориентированной вдоль главной оси сверхрешетки GaAs/AlAs (001) или оси  $C_6$  кристалла со структурой вюрцита. Константы  $\delta_n$  описывают соответственно дублет-дублетное расщепление ( $\delta_0$ ), расщепление нерадиационного дублета ( $\delta_1$ ) на состояния  $(|2\rangle \pm e^{-i\Phi_1} |-2\rangle)/\sqrt{2}$  и расщепление радиационного дублета ( $\delta_2$ ) на состояния  $(|1\rangle \pm e^{-i\Phi_2} |-1\rangle)/\sqrt{2}$ , дипольно активные вдоль осей  $\xi$  и  $\eta$ , повернутых относительно осей  $x, y$  на угол  $\Phi_2/2$ .

При локализации экситона на анизотропном острове или в анизотропной квантовой точке симметрия системы понижается и радиационный дублет должен расщепляться на два подуровня, поляризованных линейно в двух ортогональных направлениях, ориентация которых задается формой локализирующего потенциала, вследствие чего параметр  $\delta_2 \neq 0$ . Действительно, недавно при исследовании спектров фотолюминесценции локализованных экситонов в квантовых ямах GaAs/AlGaAs (001) в режиме ближнего поля (*optical near-field regime*) было обнаружено обменное расщепление дублета  $e1-hh1$  (1s) на две компоненты, поляризованные вдоль осей  $[110]$  и  $[\bar{1}\bar{1}0]$ , т. е. фаза  $\Phi_2$  в (4.10) равна  $\pm 90^\circ$ . В сверхрешетках GaAs/AlAs (001) типа II наблюдалось аналогичное расщепление, связанное с локализацией экситона на отдельном интерфейсе и низкой симметрией  $C_{2v}$  одиночного интерфейса. Квантовые точки типа InAs/GaAs, выращенные в процессе самоорганизации, имеют форму пира-

миды (возможно, усеченной), высота которой параллельна оси  $z \parallel [001]$ , а прямоугольное основание ориентировано вдоль осей  $[100]$  и  $[010]$ . Точки с квадратным основанием характеризуются точечной симметрией  $C_{2v}$ , при которой  $\Phi_2 = \pm 90^\circ$ , и в отсутствие магнитного поля компоненты дублета поляризованы по осям  $x \parallel [1\bar{1}0]$  и  $y \parallel [110]$ . В общем случае прямоугольного основания локальная симметрия понижается до  $C_2$  и обе величины  $\Omega_1 = \delta_2 \cos \Phi_2$ ,  $\Omega_2 = \delta_2 \sin \Phi_2$  отличны от нуля. Ясно, что знак  $\Omega_1$  противоположен для квантовых точек с основаниями, вытянутыми вдоль осей  $[100]$  и  $[010]$ . Заметим, что при  $\Omega_2 = \Omega_{\parallel} = 0$ ,  $\Omega_1 \neq 0$  компоненты дублета были бы поляризованы по осям  $x' \parallel [100]$ ,  $y' \parallel [010]$ , развернутым на  $45^\circ$  относительно осей  $x$ ,  $y$ . Рассмотрим, к чему приводит обменное расщепление радиационного дублета.

В магнитном поле экситонный спин-гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}$  включает, помимо оператора обменного взаимодействия (4.10), зеемановский вклад

$$\hat{\mathcal{H}}_B = (g_e^{\parallel} \mu_0 \hat{s}_z + g_h^{\parallel} \mu_0 \hat{J}_z) B_z + g_e^{\perp} \mu_0 \mathbf{s}_{\perp} \mathbf{B}_{\perp}, \quad (4.11)$$

где  $\hat{s}$  и  $\hat{J}$  — операторы спина электрона ( $s = 1/2$ ) и дырки ( $J = 3/2$ );  $\mu_0$  — магнетон Бора;  $g_e^{\parallel}$ ,  $g_e^{\perp}$  — продольный или поперечный  $g$ -фактор электрона; учтено также, что для тяжелой дырки  $\pm 3/2$  отлична от нуля только продольная компонента  $g$ -фактора  $g_h^{\parallel}$ . В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением продольной геометрии поля  $\mathbf{B} \parallel z$ , при которой положение уровней квартета определяется выражениями:

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \frac{\delta_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta_2^2 + (3g_h^{\parallel} - g_e^{\parallel})^2 \mu_0^2 B^2}, \\ E_{3,4} &= -\frac{\delta_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta_1^2 + (3g_h^{\parallel} + g_e^{\parallel})^2 \mu_0^2 B^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для анализа оптической ориентации и выстраивания экситонов удобно рассматривать дублет  $|\pm 1\rangle$  как пару состояний псевдоспина  $S = 1/2$ . Тогда гамильтониан, описывающий расщепление дублета в продольном магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel z$ , можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar}{2} (\Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2 + \Omega_3 \sigma_3), \quad (4.13)$$

где  $\hbar \Omega_1 = g_1 \mu_0 B$ ;  $g_1 = 3g_h^{\parallel} - g_e^{\parallel}$  — продольный  $g$ -фактор экситона;  $\sigma_i$  — матрицы Паули в осях 1, 2, 3 эффективного пространства, в котором вращается псевдоспин;  $\hbar \Omega_1$  и  $\hbar \Omega_2$  — два линейно

независимых параметра обменного расщепления радиационного дублета. Если пренебречь анизотропией генерации и рекомбинации экситонов, то средние значения проекций псевдоспина  $S_j$  ( $j=1,2,3$ ) будут связаны со степенями поляризации излучаемого света, или параметрами Стокса, простыми соотношениями:

$$P_{l'} = 2S_1, P_l = 2S_2, P_c = 2S_3. \quad (4.14)$$

Аналогичные соотношения связывают поляризацию падающего света  $P_{l'}, P_l, P_c$  и направление псевдоспина  $S^0$  в момент генерации экситона, если в процессе возбуждения не происходит частичной потери поляризации. Согласно (4.13), псевдоспин прецессирует вокруг вектора  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{\parallel})$  с частотой  $|\Omega|$ . Если эта частота существенно превышает обратное время жизни экситона  $\tau^{-1}$  и время спиновой релаксации  $\tau_s \gg \tau$ , то для нахождения среднего вектора псевдоспина  $S$  достаточно спроектировать вектор  $S^0$  на направление  $\Omega$ , т. е.  $S = \Omega(\Omega S^0)/|\Omega|^2$ . В результате получаем связь между поляризацией фотолюминесценции и возбуждающего света:

$$P_i = \Lambda_{ij} p_j^0 \quad (i, j = l', l, c); \quad (4.15)$$

$$\|\Lambda_{ij}\| = \frac{1}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_{\parallel}^2} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & \Omega_1\Omega_2 & \Omega_1\Omega_{\parallel}^2 \\ \Omega_1\Omega_2 & \Omega_2^2 & \Omega_2\Omega_{\parallel}^2 \\ \Omega_1\Omega_{\parallel} & \Omega_2\Omega_{\parallel} & \Omega_{\parallel}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Заметим, что в точках пересечения уровней даже слабое возмущение, понижающее симметрию и смешивающее различные уровни, может приводить к появлению заметной циркулярной поляризации фотолюминесценции локализованных экситонов в структурах с квантовыми ямами. Согласно (4.12), уровень  $E_3$  пересекается с  $E_1$  и  $E_2$  при значениях поля

$$B^* = \frac{\sqrt{X^2 - \delta_1^2}}{\mu_0 (3g_h^{\parallel} + g_e^{\parallel})}, \quad (4.17)$$

$$X = \frac{1}{1-\lambda} \left[ 2\delta_0 \pm \sqrt{4\lambda\delta_0^2 + (1-\lambda)(\delta_2^2 - \lambda\delta_1^2)} \right], \lambda = \left( \frac{3g_h^{\parallel} - g_e^{\parallel}}{3g_h^{\parallel} + g_e^{\parallel}} \right)^2.$$

Обменное расщепление радиационного дублета можно измерить прямо с помощью эксперимента по квантовым биениям.

#### 4.4. Основная идея квантовых биений

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  волновая функция квантовой системы представляет собой линейную суперпозицию двух состояний:  $\psi(t=0) = C_1 |1\rangle + C_2 |2\rangle$ . С течением времени волновая функция меняется как

$$\psi(t) = \exp(-iE_1 t/\hbar) C_1 |1\rangle + \exp(-iE_2 t/\hbar) C_2 |2\rangle.$$

Предположим, что детектор реагирует на состояние  $|D\rangle = \bar{C}_1 |1\rangle + \bar{C}_2 |2\rangle$ . Скалярное произведение

$$\langle D|t\rangle = \exp(-iE_1 t/\hbar) \{\bar{C}_1^* C_1 + \bar{C}_2^* C_2 \exp[i(E_1 - E_2)t/\hbar]\}.$$

Поэтому сигнал, регистрируемый детектором, пропорционален квадрату модуля

$$\begin{aligned} |\langle D|t\rangle|^2 &= |\bar{C}_1 C_1|^2 + |\bar{C}_2 C_2|^2 + \\ &+ 2 \operatorname{Re}\{\bar{C}_1 C_1^* \bar{C}_2^* C_2 \exp[i(E_1 - E_2)t/\hbar]\}. \end{aligned}$$

*Пример:*  $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\bar{C}_1 = \pm \bar{C}_2 = 1/\sqrt{2}$ ,  $|\langle D|t\rangle|^2 = 0.5\{1 \pm \cos[(E_2 - E_1)t/\hbar]\}.$

Проиллюстрируем идею квантовых биений на примере нестационарного эффекта Ханле. Пусть в результате импульсного возбуждения в зоне проводимости рождаются спин-поляризованные фотоэлектроны. Обозначим их начальную концентрацию в виде  $n^0 \equiv n(t=0)$ , а начальный суммарный спин в виде  $s^0 = (0, 0, s_z^0)$ , где  $s_z^0 = \mp P_c^0 n/2$ . Временная зависимость  $n(t)$  и  $s(t)$  при  $t > 0$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$  описывается уравнениями (4.6) или (4.7), в которых нужно положить нулю скорости генерации  $G$  и  $\dot{s}$  и добавить в левые части производные  $dn/dt$  и  $ds/dt$  (или  $ds_i/dt$ ,  $i = x, y, z$ ). При  $\mathbf{B} \parallel x$  решения для  $n$  и  $s_x$  легко находятся:  $n(t) = n^0 \exp(-t/\tau_0)$ ,  $s_x = 0$ . Что касается двух других компонент вектора  $s$ , то удобно пару вещественных уравнений для  $s_y, s_z$  переписать в виде одного комплексного уравнения для комбинации  $s_+ = s_z + is_y$ , которое имеет вид



$$\frac{ds_+}{dt} + \left( \frac{1}{T} + i\Omega_L \right) s_+ = 0 \quad (4.18)$$

при начальном условии  $s_+(t) = s_z^0$ . Его решение также легко находится:

$$s_+(t) = s_z^0 \exp \left[ -t \left( \frac{1}{T} + i\Omega_L \right) \right],$$

откуда

$$s_z(t) = s_z^0 e^{-t/T} \cos \Omega_L t, \quad s_y(t) = -s_z^0 e^{-t/T} \sin \Omega_L t.$$

По определению параметра Стокса  $P_c$  интенсивности циркулярно поляризованных компонент  $I_{\pm} = I(1 \pm P_c)/2$ . Учитывая, что  $P_c = \alpha p = 2 \alpha s_z / n$  (см. формулу (4.5)), получаем для нестационарного эффекта Ханле:

$$I_{\pm} \propto e^{-t/\tau_0} (1 + e^{-t/\tau_s} \alpha^2 P_c^0 \cos \Omega_L t). \quad (4.19)$$

Для анализа формулы (4.19) на языке квантовых биений введем спиновую волновую функцию фотозлектрона  $\psi(t)$  и разложим ее по собственным спиновым состояниям в магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel x$ , т. е. по собственным состояниям матрицы  $\sigma_x$ :

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Пренебрегая конечностью времени жизни и времени спиновой релаксации фотозлектрона, имеем (при  $P_c = -1$ ):

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\Omega_L t/2} |1\rangle + e^{i\Omega_L t/2} |2\rangle \right). \quad (4.20)$$

Рассмотрим случай  $\alpha = -1$ , который реализуется для межзонных переходов  $hh1 \rightarrow e1$  в структуре с квантовой ямой. Тогда при настройке анализатора на регистрацию циркулярно поляризованной компоненты  $\sigma_+$  или  $\sigma_-$  имеем соответственно  $|D\rangle = (|1\rangle \mp |2\rangle)/\sqrt{2}$ . Таким образом, в рассматриваемом частном случае для коэффициентов  $C_i, \bar{C}_i$  имеем:  $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\bar{C}_1 = \mp \bar{C}_2 = 1/\sqrt{2}$ . В результате получаем  $\langle D|t\rangle = e^{-i\Omega_L t/2} \times (1 \mp e^{i\Omega_L t})/2$  или  $I_{\pm} \propto |\langle D|t\rangle|^2 = (1 \mp \cos \Omega_L t)/2$ . Учет конеч-

ности времени жизни сводится к умножению  $|\langle D|t\rangle|^2$  на  $e^{-t/\tau_0}$ , а конечности времени спиновой релаксации — к умножению  $\cos \Omega_L t$  на  $e^{-t/\tau_s}$  в согласии с формулой (4.19).

#### 4.5. Фотолюминесценция локализованных экситонов в режиме многократных туннельных прыжков

Необходимым следствием режима многократных прыжков локализованных экситонов является временной сдвиг пика фотолюминесценции при импульсном оптическом возбуждении. Выведем формулу для зависимости положения пика от времени, исходя из общих физических соображений. Предположим для простоты, что

1) плотность локализованных состояний экспоненциально спадает с уменьшением энергии экситона

$$g(\epsilon) = g_0 e^{-\epsilon/\epsilon_0}, \quad (4.21)$$

где  $\epsilon$  — энергия локализации, отсчитанная от края подвижности  $E_0$  для экситонов, т. е.

$$\epsilon = E_0 - E, \quad (4.22)$$

$E$  — энергия возбуждения экситона, а параметр  $\epsilon_0$  характеризует скорость убывания плотности состояний с ростом  $\epsilon$ ;

2) температура образца близка к нулю и вероятность прыжка между состояниями  $\epsilon \rightarrow \epsilon'$  отлична от нуля лишь при  $\epsilon' > \epsilon$ ;

3) вероятность прыжка в единицу времени  $w_h$  зависит экспоненциально от расстояния  $r$  между центрами локализации исходного и конечного состояний:

$$w_h(r) = \omega_0 e^{-2r/L} \theta(\epsilon' - \epsilon), \quad (4.23)$$

где  $L$  — радиус локализации экситона в плоскости интерфейса; для простоты зависимостью  $L$  и  $\omega_0$  от  $\omega$  пренебрегаем;

4) рекомбинационное время жизни экситона  $\tau_0$  не зависит от энергии локализации.

Введем концентрацию  $\rho(\epsilon)$  локализованных состояний с энергией локализации, превышающей  $\epsilon$ . Согласно (4.21), имеем

$$\rho(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} d\epsilon' g(\epsilon') = g_0 \epsilon_0 e^{-\epsilon/\epsilon_0}. \quad (4.24)$$

Следовательно, среднее расстояние  $\bar{r}_\epsilon$  между центрами локализации с  $\epsilon' > \epsilon$  можно оценить, исходя из условия, что в круге радиуса  $\bar{r}_\epsilon$  в среднем находился один такой центр локализации, что эквивалентно соотношению

$$\pi \bar{r}^2(\epsilon) \rho(\epsilon) = 1. \quad (4.25)$$

Экситон, находящийся в состоянии  $\epsilon$ , совершает очередной прыжок в среднем на расстояние  $\bar{r}_\epsilon$ ; среднее время жизни по отношению к такому прыжку равно

$$\tau_\epsilon = \omega_h^{-1} - 1(\bar{r}_\epsilon) = \omega_0^{-1} e^{2\bar{r}_\epsilon/L}. \quad (4.26)$$

Положение  $E_{\max} = E - \epsilon_{\max}$  пика фотолюминесценции в момент времени  $t$  после импульсного возбуждения находится из очевидного соотношения  $\tau_{\epsilon_{\max}} = t$ , или  $\omega_0^{-1} \exp(2\bar{r}_\epsilon/L) = t$ , или  $2\bar{r}_\epsilon/L = \ln(\omega_0 t)$ , или окончательно

$$\epsilon_{\max}(t) = \epsilon_0 \ln[g_0 \epsilon_0 \pi (L/2)^2 \ln^2(\omega_0 t)] = A + 2\epsilon_0 \ln \ln(\omega_0 t), \quad (4.27)$$

где константа  $A = \epsilon_0 \ln[g_0 \epsilon_0 \pi (L/2)^2]$ . Таким образом, временной сдвиг пика фотолюминесценции описывается двойным логарифмическим законом. Заметим, что в отсутствие зависимости  $\tau_0$  от  $\epsilon$  интегральная интенсивность излучения затухает по экспоненциальному закону

$$J(t) = \int I(\omega, t) d\omega = J(0) e^{-t/\tau_0}, \quad (4.28)$$

где  $I(\omega, t)$  — спектральная интенсивность в момент времени  $t$ .

Рассуждая в духе вывода формулы (4.27), заключаем, что при стационарном оптическом возбуждении выше края подвижности положение пика фотолюминесценции локализованных экситонов определяется формулой (4.27), в которой время  $t$  нужно заменить на рекомбинационное время жизни экситона  $\tau_0$ :

$$\epsilon_{\max}^{cw} = A + 2\epsilon_0 \ln \ln(\omega_0 \tau_0), \quad (4.29)$$

где верхний индекс *cw* (*continuous wave*) указывает на стационарные условия возбуждения.

Получим этот же результат в рамках более строгой кинетической теории. Будем характеризовать каждое локализованное состояние экситона энергией  $\epsilon$  и расстоянием  $r$  до ближайшего

состояния с энергией локализации  $\epsilon' > \epsilon$ . Кинетическое уравнение для степени заселенности  $f$  состояния  $\epsilon, r$  имеет вид

$$\frac{1}{\tau_0} f(\epsilon, r) + I_{\epsilon, r} \{f\} = \Gamma^{(0)}. \quad (4.30)$$

Здесь  $\Gamma^{(0)}$  — скорость генерации на уровень  $\epsilon$ ;  $I_{\epsilon, r} \{f\}$  — аналог интеграла столкновений в обычном уравнении Больцмана (для свободных частиц). В приближении прыжка на ближайший центр с  $\epsilon' > \epsilon$  имеем

$$I_{\epsilon, r} \{f\} = w_h(r) f(\epsilon, r) - \int_0^\epsilon d\epsilon_1 \int_0^\infty dr_1 \frac{g(\epsilon_1)}{\rho(\epsilon_1)} P_{\epsilon_1}(r_1) w_h(r_1) f(\epsilon_1, r_1). \quad (4.31)$$

Первое слагаемое в правой части описывает скорость ухода с состояния  $\epsilon, r$ ; второе описывает скорость прихода из вышележащих локализованных состояний, т. е. из состояний с  $\epsilon_1 < \epsilon$ . Величина  $P_{\epsilon_1}(r_1) dr_1$  есть условная вероятность того, что в сфере радиуса  $r_1$ , проведенной вокруг центра локализации  $\epsilon_1$ , нет центров с энергией локализации  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , а в сферическом слое радиуса  $r_1$  шириной  $dr_1$  такой центр имеется. При случайном расположении центров локализации функция  $P_\epsilon(r)$  принимает вид

$$P_\epsilon(r) = \rho(\epsilon) S_d(r) \exp[-V_d(r) \rho(\epsilon)], \quad (4.32)$$

где  $d$  — размерность пространства;  $V_d(r)$  — объем (обобщенной) сферы в  $d$ -мерном пространстве:  $V_3(r) = 4\pi r^3/3$ ,  $V_2(r) = \pi r^2$ ,  $V_1(r) = 2r$ ;  $S_d(d) = dV_d(r)/dr$  — площадь обобщенной сферы:  $S_3(r) = 4\pi r^2$ ,  $S_2(r) = 2\pi r$ ,  $S_1(r) = 2$ . Как и при выводе формулы (4.29), мы пренебрегаем зависимостью  $\tau_0$ ,  $\Gamma^{(0)}$  и  $w_h(r)$  от  $\epsilon$ . Спектральная интенсивность фотолюминесценции  $I(\omega)$  пропорциональна энергетической функции распределения  $N(\epsilon)$ , которая в свою очередь связана с  $f(\epsilon, r)$  и  $P_\epsilon(r)$  интегральным соотношением

$$N(\epsilon) = g(\epsilon) \int_0^\infty dr P_\epsilon(r) f(\epsilon, r).$$

При этом  $\omega = E/\hbar = (E_0 - \epsilon)/\hbar$ . Введем полную скорость генерации на уровень  $\epsilon$ , включающую приход как с делокализованных, так и с локализованных состояний:

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma^{(0)} + \int_0^\varepsilon d\varepsilon_1 \int_0^\infty dr_1 \frac{d(\varepsilon_1)}{\rho(\varepsilon_1)} P_{\varepsilon_1}(r_1) w_h(r_1) f(\varepsilon_1, r_1). \quad (4.33)$$

Преобразуем уравнение (4.30) к виду

$$\left[ \frac{1}{\tau_0} + w_h(r) \right] f(\varepsilon, r) = \Gamma(\varepsilon),$$

выразим  $f(\varepsilon_1, r_1)$  через  $\Gamma(\varepsilon_1)$  и подставим полученное выражение в (4.33). В результате приходим к интегральному уравнению для полной скорости генерации

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma^{(0)} + \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \Gamma(\varepsilon_1) W_h(\varepsilon_1), \quad (4.34)$$

где  $W_h(\varepsilon)$  — вероятность того, что экситон на уровне  $\varepsilon$  предпочитает прыгнуть вниз, а не рекомбинировать:

$$W_h(\varepsilon) = \int_0^\infty dr P_\varepsilon(r) \frac{w_h(r)}{\tau_0^{-1} + w_h(r)}.$$

Дифференцируя уравнение (4.34) по  $\varepsilon$ , находим:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_0} W_h(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon).$$

Его решение с граничным условием  $\Gamma(0) = \Gamma^{(0)}$  имеет вид

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma^{(0)} \exp \left[ \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0} W_h(\varepsilon_1) \right]; \quad (4.35)$$

и, следовательно,

$$f(\varepsilon, r) = \frac{\Gamma^{(0)}}{\tau_0^{-1} + w_h(r)} \exp \left[ \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0} W_h(\varepsilon_1) \right]. \quad (4.36)$$

Дальнейшие упрощения возможны после приближенной замены отношения

$$\frac{w_h(r)}{\tau_0^{-1} + w_h(r)}$$

ступенчатой функцией  $\theta(\tilde{r} - r)$ , где критический радиус  $\tilde{r}$  находится из условия

$$w_h(\tilde{r}) = \frac{1}{\tau_0} \quad \text{или} \quad \tilde{r} = \frac{L}{2} \ln(\omega_0 \tau_0). \quad (4.37)$$

В этом же приближении

$$\frac{\tau_0^{-1}}{\tau_0^{-1} + w_h(r)} = 1 - \frac{w_h(r)}{\tau_0^{-1} + w_h(r)} = 1 - \theta(\tilde{r} - r) = \theta(r - \tilde{r}), \quad (4.38)$$

и мы последовательно получаем

$$W_h(\varepsilon) \approx \int_0^{\tilde{r}} dr P_\varepsilon(r) = 1 - e^{X(\varepsilon)},$$

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \Gamma^{(0)} \exp \left[ \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \left( 1 - e^{X(\varepsilon_1)} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) &= g(\varepsilon) \int_{\tilde{r}}^\infty dr P_\varepsilon(r) \exp \left[ \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0} W_h(\varepsilon_1) \right] = \\ &= g_0 \exp \left[ -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - X(\varepsilon) + \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \left( 1 - e^{X(\varepsilon_1)} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$X(\varepsilon) = \rho(\varepsilon) V_d(\tilde{r}). \quad (4.39)$$

Положение пика фотолюминесценции находится из условия обращения в ноль производной от показателя экспоненты по  $\varepsilon$ , т. е. из уравнения

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{dX(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_0} \left( 1 - e^{X(\varepsilon)} \right) = 0$$

или  $X = e^{-X}$ . Это трансцендентное уравнение для  $X$  имеет единственное решение  $\bar{X} \approx 0.567$ . Используя (4.39), получаем выражение для положения максимума распределения локализованных экситонов по энергии и пика фотолюминесценции:  $\rho(\epsilon_{\max})V_d(\tilde{r}) = \bar{X}$  или

$$\epsilon_{\max}^{\text{cw}} = \epsilon_0 \{ \ln[g_0 \epsilon_0 V_d(\tilde{r})] + \bar{X} \} = A' + d\epsilon_0 \ln \ln(\omega_0 \tau_0). \quad (4.40)$$

Для экситонов, локализованных в квантовой яме (случай  $d = 2$ ), это выражение отличается от (4.29) лишь заменой коэффициента  $A$  на  $A' = A + \bar{X}$ . Кинетическая теория позволяет не только находить положение пика, но и рассчитать форму спектра фотолюминесценции. Добавляя в уравнение (4.30) слагаемое  $df(\epsilon, r)/dt$ , можно решать и нестационарные задачи, однако временная эволюция спектра фотолюминесценции находится только путем численного расчета на компьютере. Результаты расчета хорошо аппроксимируются зависимостью

$$\epsilon_{\max}(t) = \epsilon_0 \{ \ln[N_0 \ln^2(\omega_0 t)] + \bar{X}' \}, \quad (4.41)$$

где  $N_0 = g_0 \epsilon_0 V_d(L/2)$ ;  $\bar{X}'$  — константа, несколько отличающаяся от  $\bar{X}$  и слабо зависящая от  $N_0$ ,  $\omega_0 \tau_0$  и размерности пространства. Видно, что формула (4.41) при  $d = 2$  отличается от (4.27) слагаемым  $\epsilon_0 \bar{X}'$ . Приведем выражения для  $\epsilon_{\max}^{\text{cw}}$  и  $\epsilon_{\max}(t)$ , эквивалентные (4.40) и (4.41), но более удобные для сопоставления с экспериментом:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\max}^{\text{cw}} &= \epsilon_0 \{ \ln[N_0 \ln^2(\omega_0 \tau_0)] + \bar{X} \}, \\ \epsilon_{\max}(t) &= \epsilon_{\max}^{\text{cw}} + \epsilon_0 \left( 2 \ln \frac{\ln \omega_0 t}{\ln \omega_0 \tau_0} + \alpha \right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

где  $\alpha = \bar{X}' - \bar{X}$ .

## 4.6. Эксперимент

**Локализованные экситоны в сверхрешетке GaAs/AlAs типа II.** Как отмечалось в п. 4.3, радиационный дублет у экситона  $e1-hh1(1s)$ , локализованного в сверхрешетке GaAs/AlAs типа II, расщеплен на два подуровня, поляризованных вдоль осей  $[1\bar{1}0]$  и  $[110]$ , так что в (4.16) нужно положить  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 \neq 0$ . Более того, эксперимент показывает, что в одной и той же сверхрешетке

имеется два класса локализованных экситонных состояний, которые характеризуются разными по знаку, но совпадающими по абсолютной величине значениями расщепления  $\hbar\Omega_2 \equiv E_{[110]} - E_{[\bar{1}\bar{1}0]}$ . Объяснение этих фактов базируется на том, что экситоны, которые вносят вклад в низкотемпературную фотолюминесценцию нелегированных сверхрешеток типа II, представляют собой связанные электронно-дырочные пары, локализованные на несовершенствах интерфейсов и образованные из X-электрона и  $\Gamma$ -дырки, размерно-квантованных в соседних слоях AlAs и GaAs. Согласно теории [36,37], два класса экситонных состояний с противоположными знаками  $\Omega_2$  — это экситоны, локализованные на разных интерфейсах, соответственно AlAs на GaAs и GaAs на AlAs, т. е. экситоны с электроном, расположенным или в правом, или в левом слое AlAs по отношению к слою GaAs, в котором фотовозбуждена дырка.

Согласно (4.15), (4.16), при  $\Omega_1 = 0$  и при  $\Omega_2$ , превышающем обратное время жизни экситона, поляризация  $P_{l'}$  равна нулю, а зависимость двух других параметров Стокса (см. (4.2)) от продольного магнитного поля описывается выражениями:

$$P_c = \frac{\Omega_{\parallel}^2 P_c^0 + \Omega_2 \Omega_{\parallel} P_l^0}{\Omega_{\parallel}^2 + \Omega_2^2}, \quad P_l = \frac{\Omega_2 \Omega_{\parallel} P_c^0 + \Omega_2^2 P_l^0}{\Omega_{\parallel}^2 + \Omega_2^2}. \quad (4.43)$$

Здесь предполагается, что оси 1 и 2, относительно которых определена поляризация  $P_l$ , ориентированы по направлениям  $[1\bar{1}0]$  и  $[110]$ , а оси  $l'$  и  $2'$ , которым соответствует поляризация  $P_{l'}$  — по направлениям  $[100]$  и  $[010]$  соответственно.

Из (4.43) следует, что при резонансном возбуждении светом, линейно поляризованным по  $[110]$  или  $[1\bar{1}0]$ , продольное магнитное поле  $\mathbf{B} \parallel z$  порождает два эффекта: а) подавляет выстраивание экситонов и б) вызывает преобразование линейной поляризации фотолюминесценции в циркулярную. При циркулярно поляризованном возбуждении в отсутствие магнитного поля ( $\Omega_{\parallel} = 0$ ) фотолюминесценция неполяризована. Продольное магнитное поле восстанавливает циркулярную поляризацию фотолюминесценции и одновременно индуцирует линейную поляризацию  $P_l$ . Так как в сверхрешетке типа II имеется два класса экситонов со значениями  $\Omega_2$ , отличающимися знаками, то слагаемые в (4.43), описывающие конверсию поляризации, нужно умножить на фактор разбаланса  $f = (N^{(+)} - N^{(-)}) / (N^{(+)} + N^{(-)})$ , где  $N^{(\pm)}$  — количество локализованных состояний на интерфейсах AlAs-на-GaAs и GaAs-на-AlAs. В общем случае качество этих интерфейсов различается; фактор  $f$  отличен от нуля и может быть как положительным, так и отрицательным.



При учете спиновой релаксации нужно включить в рассмотрение также оптически неактивные состояния  $|\pm 2\rangle$  и анализировать четырехуровневую систему. Опуская выкладки, приведем окончательный результат [38]:

$$P_c = b \frac{\Omega_{\parallel}^2 \tilde{P}_c^0 + f \Omega_2 \Omega_{\parallel} \tilde{P}_l^0}{a \Omega_{\parallel}^2 + \Omega_2^2}, \quad P_l = b \frac{f \Omega_2 \Omega_{\parallel} \tilde{P}_c^0 + \Omega_2^2 \tilde{P}_l^0}{a \Omega_{\parallel}^2 + \Omega_2^2},$$

$$P_{l'} = 0. \quad (4.44)$$

Здесь  $a$  и  $b$  — постоянные параметры, зависящие от времен жизни и времен спиновой релаксации экситона; знак « $\sim$ » указывает, что при квазирезонансном возбуждении из-за потерь при энергетической релаксации значения  $\tilde{P}_i^0$  могут быть меньше степеней поляризации  $P_i^0$  первичного излучения.

Обозначим в виде  $I_j^i$  интенсивность фотолюминесценции, измеряемую в конфигурации  $(i, j)$  поляризатора и анализатора, где индексы  $i, j$  пробегают состояния линейной поляризации вдоль осей  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[110]$ ,  $[1\bar{1}0]$  и циркулярной поляризации  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$ . В работе [38] измерялись не степени поляризации фотолюминесценции при фиксированной поляризации возбуждающего света, а использовалась модуляционная методика, при которой анализатор находился в фиксированном положении  $j$ , а поляризация первичного излучения менялась с линейной или циркулярной на ортогональную и определялись эффективные степени поляризации:

$$\rho_j^c = \frac{I_j^{\sigma_+} - I_j^{\sigma_-}}{I_j^{\sigma_+} + I_j^{\sigma_-}}, \quad \rho_j^l = \frac{I_j^{1\bar{1}0} - I_j^{110}}{I_j^{1\bar{1}0} + I_j^{110}}, \quad \rho_j^{l'} = \frac{I_j^{100} - I_j^{010}}{I_j^{100} + I_j^{010}}.$$

$$(4.45)$$

В условиях оптической ориентации и выстраивания экситонов, описываемых формулами (4.15), (4.16), (4.43) или (4.44), набор  $\rho_j^c, \rho_j^l, \rho_j^{l'}$  совпадает с набором параметров Стокса  $P_c^j, P_l^j$  и  $P_{l'}^j$ , измеряемых при исходной поляризации  $j$ . Нужно, однако, иметь в виду, что в общем случае эти наборы могут не совпадать [38].

На рис. 40 представлены зависимости  $\rho_j^c(B_{\parallel})$  и  $\rho_j^l(B_{\parallel})$ . Из рис. 40, а видно, что  $\rho_{\sigma_+}^c(B_{\parallel})$  быстро нарастает и насыщается от 2.5 до 5 % в слабых магнитных полях  $B_{\parallel} \approx 20$  Гс, а затем медленно растет до уровня 20 % при  $B_{\parallel} = 2.5$  кГс. Рис. 40, б ясно демонстрирует индуцированную полем конверсию «ориентация—выстра-

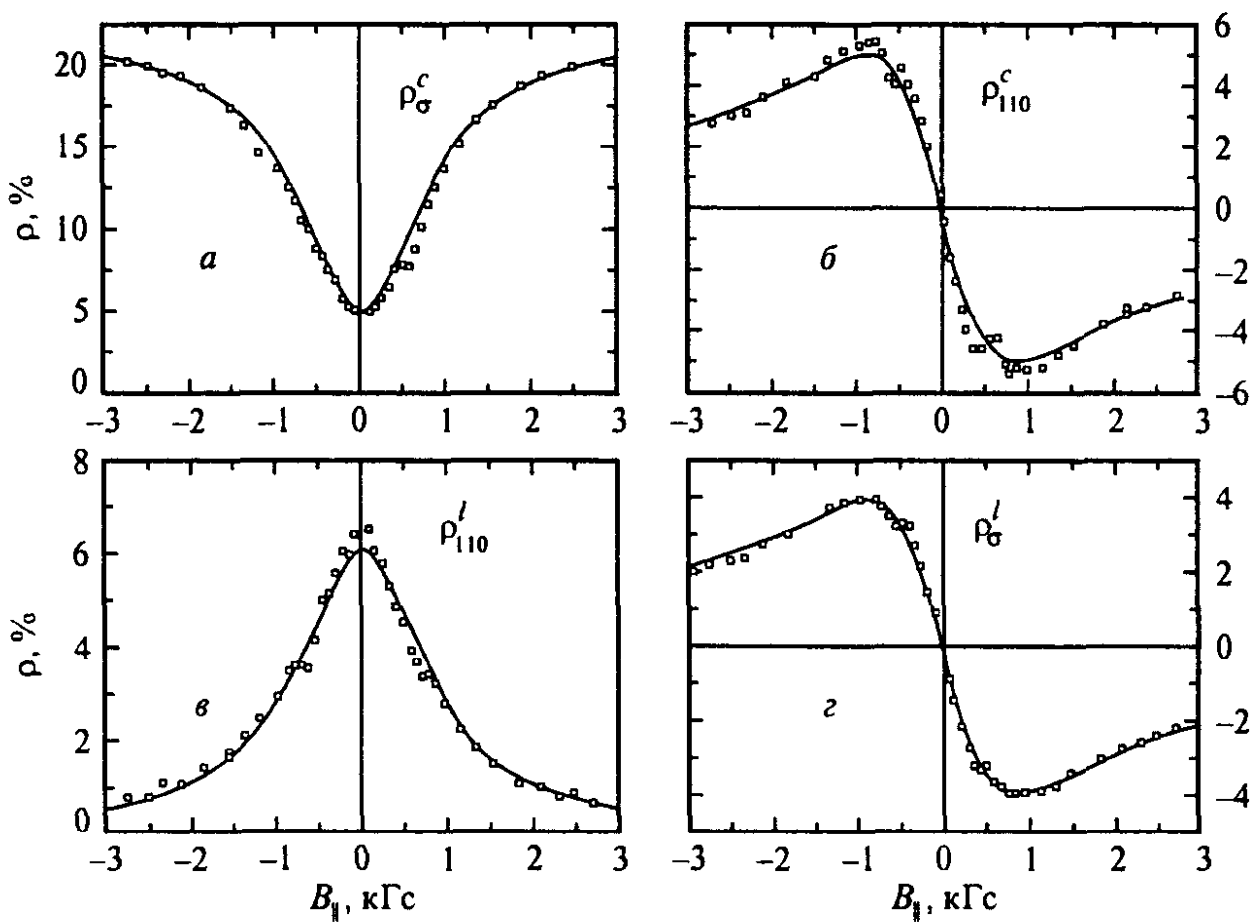


Рис. 40. Эффект воздействия продольного магнитного поля на оптическую ориентацию и выстраивание локализованных экситонов в сверхрешетке типа II GaAs/AlAs 23Å/16Å:  $\rho_{\sigma^+}^c(B_z)$  (а),  $\rho_{110}^c(B_z)$  (б),  $\rho_{110}^l(B_z)$  (в),  $\rho_{\sigma^+}^l(B_z)$  (г).

Точки — экспериментальные данные при  $T = 4.2$  К; сплошные кривые — теоретическая подгонка [38].

ивание»:  $\rho_{110}^c(B_{\parallel})$  достигает максимального значения 5% при  $B_{\parallel} \approx 0.7$  кГс и меняет знак при инверсии поля. Более того, в соответствии с теорией  $\rho_{110}^c(B_{\parallel})$  отличается знаком от измеренной зависимости  $\rho_{110}^c(B_{\parallel})$ . Эффект магнитного поля на выстраивание проиллюстрирован на рис. 40, в. Отметим, что основное изменение  $\rho_{110}^l$  происходит в тех же магнитных полях  $B_{\parallel} \approx 0.7$  кГс, что и у функции  $\rho_{\sigma^+}^c(B_{\parallel})$  на рис. 40, а. Рис. 40, г подтверждает, что эффект преобразования ориентации в выстраивание обратим: экспериментальные зависимости  $\rho_{110}^l(B_{\parallel})$  и  $\rho_{\sigma^+}^c(B_{\parallel})$  близки друг к другу.

Сплошные кривые рассчитаны по формуле (4.44) при:  $bP_c^0 = 7.6\%$ ,  $bP_l^0 = 6.1\%$ ,  $\hbar\Omega_2 = 2.1$  мкэВ,  $a = 0.45$ ,  $f = 0.9$ ,  $g_e^{\parallel} = 1.9$  и  $g_h^{\parallel} = 2.5$ . Быстрый рост  $\rho_{\sigma^+}^c$  в слабых полях связывается со вкладом в излучение электронно-дырочных пар, пространственно разделенных и характеризующихся малыми значениями обменных расщеплений. В расчете этот вклад учитывался добавлением постоянной величины 0.05 к теоретической кривой

$\rho_{\alpha+}^c(B_{\parallel})$ . За исключением узкой области полей вблизи нуля, теоретические кривые хорошо описывают экспериментальные зависимости.

**Самоорганизованные массивы квантовых точек.** В эксперименте [39] установлено, что в самоорганизованной системе квантовых точек InAlAs/AlGaAs отличны от нуля как  $\Omega_1$ , так и  $\Omega_2$ , при этом положительные и отрицательные значения  $\Omega_1$  равновероятны, а среднее значение  $\Omega_2$  отлично от нуля. Так как на опыте анализируется свет, излучаемый большим числом квантовых точек, то матрицу  $\Lambda_{\alpha\beta}$  в (4.16) нужно усреднить по распределению значений  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , в формирование которого вносят вклад флуктуации формы квантовых точек и локальные деформации. Компоненты матрицы  $\Lambda_{ij}$ , нечетные по  $\Omega_1$ , после усреднения зануляются. Если для простоты предположить, что модули  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  фиксированны, то матрица (4.16) принимает вид

$$\|\Lambda_{ij}\| = \frac{1}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_{\parallel}^2} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & \Omega_2 \Omega_{\parallel} \\ 0 & \Omega_2 \Omega_{\parallel} & \Omega_{\parallel}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Рис. 41 показывает воздействие магнитного поля на оптическое выстраивание и ориентацию, а также индуцированную магнитным полем перекачку выстраивания в ориентацию экситонов, возбуждаемых в квантовых точках. При расчете теоретических кривых предполагалось гауссово распределение параметров обменного расщепления:

$$P(B_1, B_2) = \frac{1}{2\pi b_1 b_2} \exp\left(-\frac{B_1^2}{b_1^2}\right) \exp\left[-\frac{(B_2 - \langle B_2 \rangle)^2}{b_2^2}\right], \quad (4.47)$$

где  $B_1 = \hbar\Omega_1/(\mu_0 g_{\parallel})$ ,  $B_2 = \hbar\Omega_2/(\mu_0 g_{\parallel})$ ;  $g_{\parallel}$  — продольный  $g$ -фактор экситона, а также учтено, что среднее значение  $\Omega_1$  равно нулю.

**Энергетическая релаксация локализованных экситонов.** Согласно (4.22), (4.42), простейшая теория энергетической релаксации локализованных экситонов включает пять параметров:  $E_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $N_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\tau_0$ , а при использовании выражения (4.42) еще и шестой параметр  $\alpha$ . Рекомбинационное время жизни  $\tau_0$  можно найти, измеряя кинетику затухания интегральной интенсивности  $J(t)$  и сравнивая ее с (4.28). При этом линейность кривой  $\ln J(t)$  служит проверкой предположения о независимости  $\tau_0$  от  $\varepsilon$ . Граница подвижности экситонов  $E_0$  может быть найдена по положению пика в спектре возбуждения фотолюминесцен-

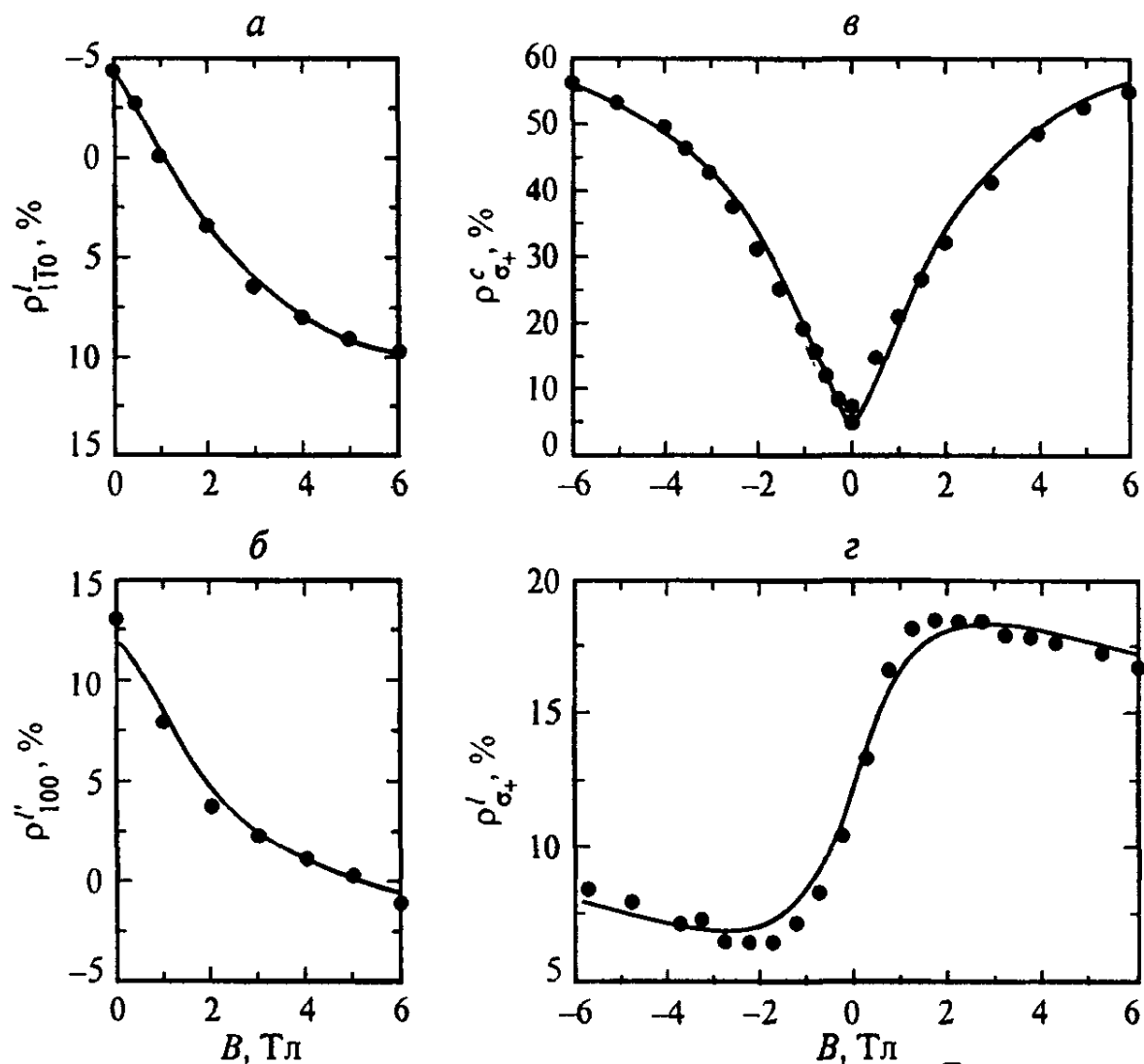


Рис. 41. Оптическое выстраивание экситонов вдоль осей  $[1\bar{1}0]$ ,  $[110]$  (а) и вдоль осей  $[100]$ ,  $[010]$  (б); оптическая ориентация экситонов (в) и преобразование оптического выстраивания вдоль осей  $[1\bar{1}0]$ ,  $[110]$  в ориентацию (г) в структуре с квантовыми точками.

Сплошными линиями показаны результаты расчета по формулам (4.15), (4.16) с учетом распределения (4.46); точки — экспериментальные данные [39].

ции при регистрации на хвосте излучения локализованных экситонов. Это позволяет вводить переменную  $\epsilon = E_0 - E$ . Значение  $\epsilon_{\max}^{\text{cw}}$  находится из стоксова сдвига спектрального пика стационарной фотолюминесценции по отношению к  $E_0$ . Это накладывает одно условие на параметры  $\epsilon_0$ ,  $\omega_0$ ,  $N_0$ . Окончательно эти параметры, а также значение  $\alpha$  выбираются из условия наилучшего согласия с экспериментальной зависимостью  $\epsilon_{\max}(t)$  и формой экспериментальных спектров фотолюминесценции.

Для иллюстрации на рис. 42 и 43 представлены соответственно временной ход  $\epsilon_{\max}(t)$  и стационарный спектр низкотемпературной фотолюминесценции, измеренные при  $T = 2$  К в структуре с квантовой ямой  $\text{Zn}_{0.8}\text{Cd}_{0.2}\text{Se} / \text{ZnSe}$  шириной 20 Å. Остальные экспериментальные данные, включающие временную кинетику интегральной фотолюминесценции  $J(t)$ , вре-

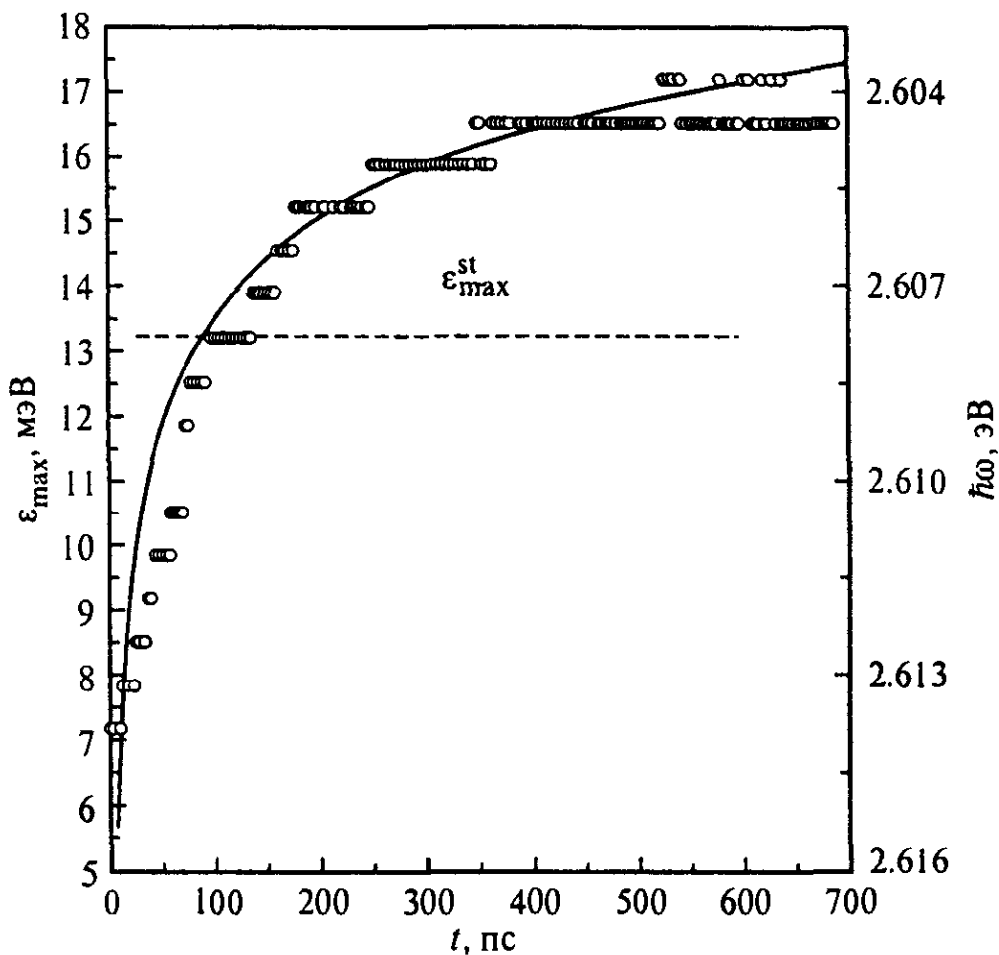


Рис. 42. Временной сдвиг пика ФЛ, измеренный (точки) при  $T = 2$  К в квантовой яме  $\text{Zn}_{0.8}\text{Cd}_{0.2}\text{Se}/\text{ZnSe}$  шириной  $20 \text{ \AA}$  и рассчитанный (сплошная кривая) по формуле (4.42) при  $\epsilon_0 = 8 \text{ мэВ}$ ,  $\omega_0 = 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $g_0 \epsilon_0 \pi (L/2)^2 = 0.053$ ,  $\alpha = 0.18$ .

Штриховая горизонтальная линия указывает положение пика в условиях стационарного возбуждения [40].

менную зависимость спектральной интенсивности  $I(\omega, t)$  при четырех различных значениях частоты излучения  $\omega$  и спектры  $I(\omega, t)$  при четырех различных значениях времени задержки  $t$ , представлены в работе [40]. Наилучшее согласие получено при следующем выборе параметров:  $\epsilon_0 = 8 \text{ мэВ}$ ,  $\omega_0 = 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $N_0 = 0.053$ ,  $\alpha \sim 0.18$ . Штриховая и пунктирная кривые на рис. 43 рассчитаны без учета и с учетом немарковской природы процессов прыжковой релаксации. Дело в том, что в интеграле столкновений (4.31) пренебрегается корреляцией между двумя последовательными прыжками. Наличие такой корреляции, или немарковость, можно пояснить, рассмотрев  $n$ -й и  $(n+1)$ -й прыжки соответственно с центра локализации  $\mathbf{r}_{n-1}$  на центр  $\mathbf{r}_n$  и с  $\mathbf{r}_n$  на  $\mathbf{r}_{n+1}$  ( $n \neq 1$ ). Учитываются только прыжки вниз на ближайший центр локализации. Для данной конкретной конфигурации центров можно заведомо сказать, что центр  $\mathbf{r}_{n+1}$  не может находиться в сфере с центром  $\mathbf{r}_{n-1}$  и радиусом  $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|$ . В противном случае экситон совершил бы прыжок  $\mathbf{r}_{n-1} \rightarrow \mathbf{r}_{n+1}$ , минуя  $\mathbf{r}_n$ . Поэтому более строгая теория должна учитывать, что

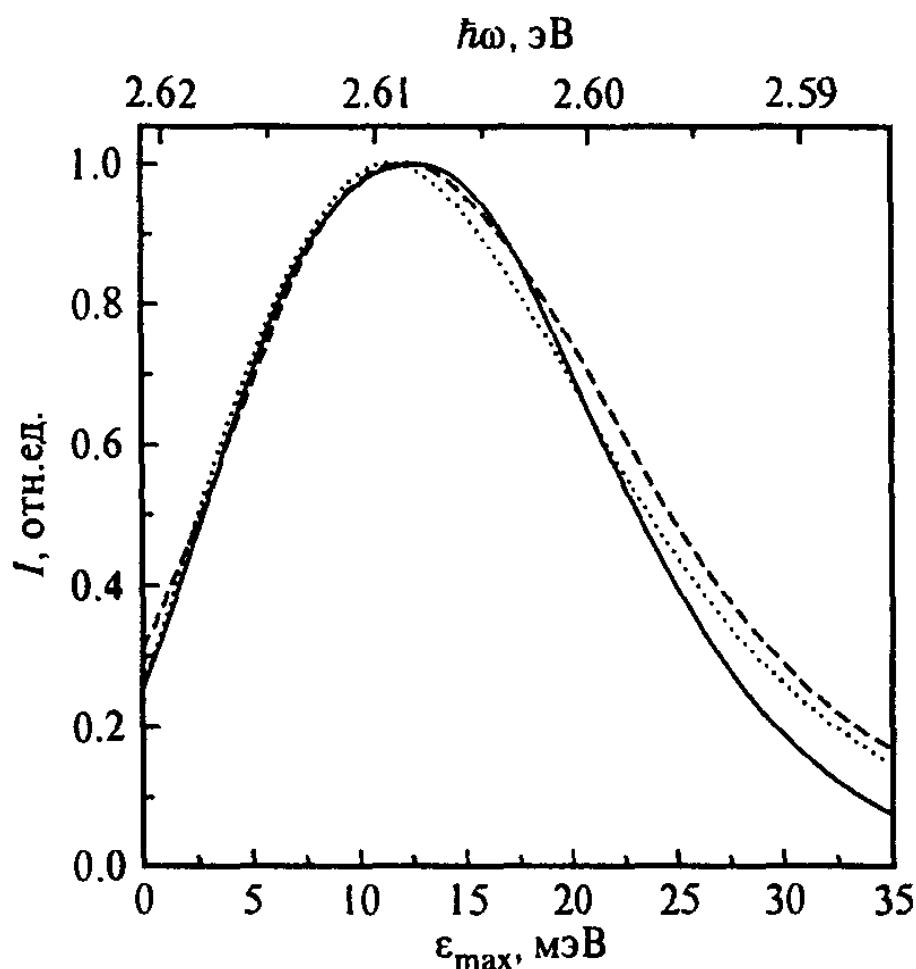


Рис. 43. Сравнение экспериментального спектра ФЛ (сплошная кривая) с теоретическими спектрами, рассчитанными в пренебрежении (штриховая кривая) и с учетом (пунктирная кривая) корреляции между последовательными прыжками [40].

прыжок экситона с центра  $г_n$  внутрь указанной сферы невозможен и, следовательно, ее нужно исключать при расчете вероятности того, что центр  $г_{n+1}$  является ближайшим доступным для центра  $г_n$ . Сравнение двух расчетных кривых на рис. 43 показывает, что немарковость играет не очень существенную роль и ею можно пренебречь.

## 5. РАССЕЯНИЕ СВЕТА В НАНОСТРУКТУРАХ

### 5.1. Классификация механизмов рассеяния света в полупроводниках

Под рассеянием света понимается возникновение в среде, освещаемой внешним источником света, новых электромагнитных волн на других частотах или/и с направлениями распространения, отличными от первоначального. Рассеянием света не считаются ни зеркальное отражение, ни преломление на гладкой макроскопической границе поверхности, разделяющей две среды.

В объемных кристаллических полупроводниках свет может рассеиваться: 1) на свободных носителях, а именно на флуктуациях плотности заряда (одночастичные возбуждения и плазмоны) и флуктуациях спиновой плотности (переходы с переворотом спина, по-английски *spin-flip transitions*); 2) на фонах оптических (комбинационное рассеяние, *Raman scattering*) или акустических (мандельштам-бриллюэновское рассеяние, *Brillouin scattering*) и 3) на статических несовершенствах (рэлеевское рассеяние). В структурах с квантовыми ямами вклад в рассеяние 1) вносят не только внутриволновые, но и межволновые переходы свободных носителей, т. е. межволновые флуктуации плотности заряда и плотности спина. Явление комбинационного рассеяния обогащается процессами рассеяния на размерно-квантованных (*confined*) и интерфейсных (*interface*) оптических фононах, а также на акустических фононах со сложным спектром (*folded acoustic phonons*).

### 5.2. Простейшая осцилляторная модель рассеяния света

Рассмотрим локализованный электрический диполь, момент которого  $P$  удовлетворяет уравнению движения классического осциллятора

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) P(t) = q E_0 \cos \omega t, \quad (5.1)$$

где  $\omega_0$  — частота собственных колебаний диполя;  $E_0$  и  $\omega$  — амплитуда электрического поля и частота падающей монохроматической световой волны; коэффициент  $q$  характеризует силу взаимодействия диполя с электрическим полем. Предположим, что по какой-либо причине этот коэффициент периодически изменяется во времени и его можно представить в виде суммы постоянной и переменной составляющих

$$q = q_0 + q_1 \cos \Omega t, \quad (5.2)$$

где  $q_0, q_1$  — константы;  $\Omega$  — частота модуляции (далее нас будет интересовать предельный случай  $\Omega \ll \omega$ ). Стационарное решение уравнения (5.1) при выборе коэффициента  $q$  в форме (5.2) состоит из трех слагаемых:

$$P(t) = \sum_{n=0, \pm 1} P_n \cos(\omega + n\Omega)t, \\ P_0 = \frac{q_0}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0, \quad P_{\pm 1} = \frac{q_1}{\omega_0^2 - (\omega \pm \Omega)^2} E_0. \quad (5.3)$$

Таким образом, изменение дипольного момента во времени представляет собой суперпозицию трех гармонических колебаний на частоте падающей волны  $\omega$  и двух других, комбинационных, частотах  $\omega \pm \Omega$ . Колебания дипольного момента порождают вторичные световые волны, в том числе волны с новыми частотами  $\omega + \Omega$  и  $\omega - \Omega$ . Это и есть простейшая модель, иллюстрирующая неупругое рассеяние света в веществе. Роль частоты модуляции  $\Omega$  может играть частота какого-либо фоновона или разность двух собственных значений энергии системы, деленная на  $\hbar$ .

Полезно несколько усложнить модель и рассмотреть два диполя с моментами  $P(t), P'(t)$ , удовлетворяющими системе уравнений

$$\frac{d^2 P(t)}{dt^2} + \omega_0^2 P(t) = q_0 E_0 \cos \omega t, \\ \frac{d^2 P'(t)}{dt^2} + \omega_0'^2 P'(t) = q'(t) P(t). \quad (5.4)$$



В рассматриваемом случае падающий свет взаимодействует напрямую только с первым диполем, который характеризуется резонансной частотой  $\omega_0$  и постоянным коэффициентом  $q = q_0$ . Колебания второго диполя возникают из-за линейной связи между диполями; коэффициент связи промодулирован во времени  $q'(t) = q'_0 + q'_1 \cos \Omega t$ . В условиях стационарного возбуждения первый диполь колеблется на частоте первичного света  $\omega$ , а колебание второго диполя включает три гармоники:

$$P'(t) = \sum_{n=0, \pm 1} P'_n \cos(\omega + n\Omega)t,$$

$$P'_0 = \frac{q_0 q'_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0'^2 - \omega^2)} E_0,$$

$$P'_{\pm 1} = \frac{q_0 q'_1}{(\omega_0^2 - \omega^2)[\omega_0'^2 - (\omega \pm \Omega)^2]} E_0. \quad (5.5)$$

Согласно (5.5), амплитуда колебаний  $P'_{+1}$  или  $P'_{-1}$ , а значит, и амплитуда рассеянной волны на соответствующей частоте  $\omega \pm \Omega$  должны гигантски возрасть при приближении к условию двойного оптического резонанса:  $\omega = \omega_0$  и  $\omega + \Omega = \omega'_0$  (или  $\omega - \Omega = \omega'_0$ ). Реальный пример двойного оптического резонанса рассмотрен в заключительной части этой главы.

**Законы сохранения.** Мы будем использовать обозначения  $\omega_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{e}_1$  и  $\omega_2, \mathbf{q}_2, \mathbf{e}_2$  для частоты, волнового вектора и единичного вектора поляризации соответственно у исходной (первичной) и рассеянной (вторичной) электромагнитных волн. Разности между частотами и волновыми векторами вторичной и первичной волн непосредственно связаны с энергией и волновым вектором частицы (квазичастицы) или возбуждения, участвующего в процессе рассеяния:

$$\hbar\omega_1 + E_1 = \hbar\omega_2 + E_2, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{k}_2, \quad (5.6a)$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \Omega, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}, \quad (5.6b)$$

$$\omega_1 + \Omega = \omega_2, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{q} = \mathbf{q}_2. \quad (5.6b)$$

Здесь  $E$  и  $\mathbf{k}$  — энергия и волновой вектор частицы, с которой сталкивается фотон в процессе (5.6a);  $\Omega$  и  $\mathbf{q}$  — частота и волновой вектор возбуждения, испускаемого (процесс (5.6b), рассеяние в стоксову область спектра) или поглощаемого (антистоксов процесс (5.6b)). Структуры с квантовыми ямами не обладают трансляционной симметрией вдоль оси роста, поэтому закон со-

хранения компоненты волнового вектора вдоль этой оси исключается из (5.6).

Феноменологически рассеяние света можно описывать, добавляя к материальному соотношению между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  вклад, обусловленный флуктуациями тензора диэлектрической восприимчивости

$$P_{\alpha} = \chi_{\alpha\beta}^0 E_{\beta} + \delta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) E_{\beta}. \quad (5.7)$$

Если  $\delta \chi \propto \exp(\mp i\Omega t \pm i\mathbf{Q}\mathbf{r})$ , то волновое уравнение для электрического поля  $\mathbf{E}$  включает неоднородный член, пропорциональный

$$\exp(-i\omega_1 t \mp i\Omega t) \exp(i\mathbf{q}_1 \mathbf{r} \pm i\mathbf{Q}\mathbf{r}),$$

который служит в качестве источника для вторичной волны. В частности, в случае мандельштам-бриллюэновского рассеяния диэлектрическая восприимчивость на частоте  $\omega_1$  разлагается по компонентам тензора деформации

$$\delta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = P_{\alpha\beta\gamma\delta} \delta u_{\gamma\delta}(\mathbf{r}, t), \quad (5.8)$$

где  $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — тензор фотоупругих коэффициентов. При феноменологическом описании спектральная интенсивность рассеянного света пропорциональна среднему квадрату флуктуации диэлектрической восприимчивости

$$I(\omega_2, \mathbf{q}_2) \propto |\delta \chi(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \omega_1 - \omega_2)|^2 E_0^2(\omega_1, \mathbf{q}_1), \quad (5.9)$$

где  $E_0$  — амплитуда исходной волны;  $\delta \chi(\mathbf{q}, \Omega)$  — пространственная и временная фурье-компонента флуктуации  $\delta \chi(\mathbf{r}, t)$ .

### 5.3. Резонансная флюоресценция двухуровневых систем

Рассмотрим простейший процесс рассеяния света — резонансную флюоресценцию двухуровневых квантовых систем (атомы, примесные центры в кристаллической матрице, локализованные экситоны, квантовые точки и т. п.). Спектральная интенсивность рассеянного света определяется выражением

$$I(\mathbf{e}_2, \omega_2 | \mathbf{e}_1, \omega_1) \propto |M|^2 \delta(\omega_2 - \omega_1), \quad (5.10)$$

$$M \propto \frac{(\mathbf{e}_2^* \mathbf{d}_{if})(\mathbf{e}_1 \mathbf{d}_{fi})}{\omega_0 - \omega_1 - i\Gamma} E_0.$$

Здесь  $\hbar\omega_0$  — энергетическое расстояние между основным ( $i$ ) и возбужденным ( $f$ ) состояниями;  $\mathbf{d}_{fi}$  — матричный элемент оператора дипольного момента для оптического перехода  $|i\rangle + \hbar\omega_1 \rightarrow |f\rangle$ ; скорость затухания  $\Gamma$  равна  $(2\tau_f)^{-1}$ , где  $\tau_f$  — время жизни возбужденного состояния  $|f\rangle$  (предполагается, что время жизни основного состояния бесконечно). Заметим, что в рассматриваемом случае частоты  $\omega_2$  и  $\omega_1$  совпадают.

Выражение для  $I$  можно переписать в эквивалентной форме:

$$I(\mathbf{e}_2, \omega_2 | \mathbf{e}_1, \omega_1) \propto w_{if}^{\text{em}} \tau_f w_{fi}^{\text{abs}}, \quad (5.11)$$

$$w_{fi}^{\text{abs}} \propto |\mathbf{e} \mathbf{d}_{fi}|^2 E_0^2 \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega_1)^2 + \Gamma^2},$$

$$w_{if}^{\text{em}} \propto |\mathbf{e}_2^* \mathbf{d}_{if}|^2 \delta(\omega_2 - \omega_1).$$

Такой процесс вторичного свечения можно рассматривать как рассеяние света, так как спектр вторичного излучения привязан к первичной частоте  $\omega_1$  и сдвигается со сдвигом  $\omega_1$ . С другой стороны, этот процесс имеет черты фотолюминесценции, так как его можно описывать в терминах двухступенчатого процесса: поглощение (*absorption*) + излучение (*emission*), с реальным промежуточным состоянием. Таким образом, его можно интерпретировать одновременно и как резонансное рассеяние, и как резонансную фотолюминесценцию. По этой причине иногда в этом и аналогичных случаях используют термин «резонансное вторичное свечение». Заметим, что при оптическом возбуждении монохроматическим светом со спектральной интенсивностью  $I_0(\omega_1)$ , плавно зависящей от частоты  $\omega_1$  в окрестности резонанса  $\omega_0$ , для спектра излучения получаем:

$$I(\omega_2) \propto \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega_2)^2 + \Gamma^2}. \quad (5.12)$$

В большинстве случаев введение двух различных явлений вторичного свечения оправдано. Действительно, в традиционно понимаемом рассеянии света возбужденные состояния системы являются виртуальными, тогда как при фотолюминесценции излучению фотона обычно предшествуют многократные переходы системы между реальными возбужденными состояниями.

#### 5.4. Рассеяние света на межподзонных возбуждениях

Рассмотрим рассеяние света при межподзонных переходах  $ev \rightarrow ev'$  в структуре с квантовой ямой  $n$ -типа, в которой состояния в валентной зоне заполнены полностью, а в зоне проводимости — частично. Равновесную функцию распределения электронов в подзонах  $ev$  обозначим в виде  $F_{vk}$ , где  $\mathbf{k}$  — двумерный волновой вектор. Как и в случае двухуровневых квантовых систем, рассеяние  $ev \rightarrow ev'$  представляет собой двухквантовый процесс. Он включает поглощение первичного фотона с переходом электрона из валентной подзоны  $hv''$  в подзону  $ev'$  и последующее излучение вторичного фотона с переходом равновесного электрона  $ev$  в оказавшееся пустым состояние  $hv''$ . Аналогично (5.10) для спектральной интенсивности имеем:

$$I(\mathbf{e}_2, \omega_2 | \mathbf{e}_1, \omega_1) \propto \sum_{vv'k} |M_{v'v}|^2 F_{vk} (1 - F_{v'k}) \delta(E_{ev'k} + \hbar\omega_2 - E_{evk} - \hbar\omega_1), \quad (5.13)$$

$$M_{v'v} \propto E_0 \sum_{v''} \frac{\langle hv'' | \mathbf{e}_2 \hat{\mathbf{p}} | ev \rangle \langle ev' | \mathbf{e}_1 \hat{\mathbf{p}} | hv'' \rangle}{E_{ev'} - E_{hv''} - \hbar\omega_1}.$$

Здесь  $E_{evk}$  — энергия электрона в подзоне  $ev$  в состоянии с волновым вектором  $\mathbf{k}$ ;  $\langle ev' | \hat{\mathbf{p}} | hv'' \rangle$  — матричный элемент оператора импульса между электронными состояниями  $|ev'k\rangle$  и  $|hv''k\rangle$ . Рассматривается геометрия рассеяния назад, когда падающая и рассеянная световые волны распространяются навстречу друг другу и параллельно нормали к плоскости интерфейсов. Согласно (5.6a), в этом случае при рассеянии латеральная составляющая волнового вектора квазичастицы не меняется.

При межзонных переходах четность огибающих функций сохраняется, поэтому она сохраняется и при рассеянии на межподзонных переходах, например, рассеяние эффективно для переходов  $e1 \rightarrow e3$ . Отступления от указанных правил отбора могут быть связаны: с учетом зависимости матричных элементов  $M_{v'v}$  от  $\mathbf{k}$ , с отсутствием центра инверсии в решетке композиционных материалов, с асимметрией квантовой ямы, обусловленной, например, встроенным электрическим полем, и с дополнительным рассеянием носителей на несовершенствах гетероструктуры и статических дефектах.

## 5.5. Рассеяние света на размерно-квантованных оптических фононах в сверхрешетках

Рассеяние на фононе в нелегированном полупроводнике микроскопически описывается как процесс третьего порядка с составным матричным элементом

$$\sum_{nn'} \frac{M_{0n'} V_{n'n} M_{n0}}{(E_{n'} - \hbar\omega_1 \pm \hbar\Omega - i\hbar\Gamma_{n'})(E_n - \hbar\omega_1 - i\hbar\Gamma_n)}, \quad (5.14)$$

где  $M_{n0}$  — матричный элемент однофотонного перехода из основного состояния кристалла  $|0\rangle$  в возбужденное состояние  $|n\rangle$ , представляющее собой электрон-дырочную пару или экситон;  $V_{n'n}$  — матричный элемент электрон-фононного взаимодействия, включающего также взаимодействие фонона с дыркой.

Оптические фононы характеризуются слабой дисперсией с ниспадающей дисперсионной кривой. Вблизи центра зоны Бриллюэна можно ограничиться членами нулевого и второго порядка в разложении частоты продольного оптического фонона

$$\Omega(\mathbf{q}) \approx \Omega(0) - \frac{\hbar q^2}{2\bar{M}} \dots \quad (5.15)$$

Здесь для удобства введен положительный параметр  $\bar{M}$ , имеющий размерность массы. Если частоты  $\Omega(0)$  в слоях  $A$  и  $B$  сверхрешетки заметно различаются, то оптические фононы испытывают размерное квантование аналогично тому, как это происходит с электронными состояниями в квантовой яме. В результате составляющая волнового вектора фонона  $q_z$  вдоль оси роста  $z \parallel [001]$  принимает дискретные значения  $\pi\nu/a$  или  $\pi\nu/b$  в зависимости от того, локализованы колебания в слоях  $A$  или  $B$  ( $\nu$  — целое число). Относительный сдвиг  $u = u(C) - u(A)$  между катионной ( $C$ ) и анионной ( $A$ ) подрешетками рассматривается как непрерывно изменяющаяся функция. При решении задачи о собственных колебаниях нужно учитывать граничные условия для относительного смещения  $u(\mathbf{r})$  и скалярного потенциала  $\phi(\mathbf{r})$  электрического поля, порождаемого этими колебаниями. В сверхрешетке типа GaAs/AlAs(001), где индексы Миллера указывают ориентацию интерфейсов, продольные оптические ( $LO$ ) моды имеют при  $q_x = q_y = 0$  симметрию  $A_1$  или  $B_2$ . Напомним, что в точечной группе такой сверхрешетки ( $D_{2d}$ ) простейшим примером базисных функций для представлений  $A_1$  или  $B_2$  могут служить константа и координата  $z$ .

При упрощенном описании размерно-квантованных  $LO$ -фононов полагают, что на интерфейсах в ноль обращается относительное смещение подрешеток [41]. В этом случае решения для оптических колебаний, например в слоях  $A$ , имеют вид  $u(\mathbf{r}) = u_v(z) \mathbf{o}_z$ , где  $\mathbf{o}_z$  — орт в направлении оси  $z$ ,

$$\begin{aligned} u_v(z, B_2) &= u_0 \cos(\pi v z/a) \quad \text{при } v = 1, 3, 5, \dots, \\ u_v(z, A_1) &= u_0 \sin(\pi v z/a) \quad \text{при } v = 2, 4, 6, \dots, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где начало отсчета выбрано в центре слоя  $A$ . Напряженность электрического поля  $E$ , возникающего при оптическом колебании, пропорциональна вектору  $u$ . Поэтому скалярный потенциал  $\phi_v(z)$  пропорционален функции  $\sin(\pi v z/a)$  для нечетных  $v$  и функции  $\cos(\pi v z/a)$  для четных  $v$ . В альтернативном упрощенном подходе считается, что скалярный потенциал  $\phi(z)$  обращается в ноль на интерфейсе и  $\phi_v(z) \propto \cos(\pi v z/a)$ , если  $v = 1, 3, \dots$ , и  $\phi_v(z) \propto \sin(\pi v z/a)$ , если  $v = 2, 4, \dots$ . В работе [42] предложены решения, которые удовлетворяют одновременно граничным условиям как для  $u_z(z)$ , так и для  $\phi(z)$ . При этом учитывается, что линейная функция  $y(z) = c_1 + c_2 z$  с постоянными коэффициентами  $c_1, c_2$  удовлетворяет однородному уравнению  $d^2 y(z)/dz^2 = 0$ .

Переходя к рассмотрению рассеяния света на размерно-квантованных  $LO$ -фононах, напомним, что символ  $\xi(\alpha\beta)\bar{\eta}$  обозначает следующую геометрию рассеяния: исходное излучение распространяется вдоль оси  $\xi$  и имеет поляризацию  $\alpha$ ; регистрируется свет, рассеянный в направлении  $\eta$  при положении анализатора  $\beta$ . Проанализируем правила отбора при рассеянии в геометрии  $z(\alpha\beta)\bar{z}$ , где  $\alpha, \beta = x, y$ , исходя из соображений симметрии. С этой целью напомним, что в объемном полупроводнике класса  $T_d$  поправка к диэлектрической поляризации среды  $P$ , индуцированная первичной волной  $E_0 \perp z$  и пропорциональная относительному смещению подрешеток  $u_z$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta P_x &= T_1 E_{0,y} u_z + T_2 E_{0,x} q_z u_z, \\ \delta P_y &= T_1 E_{0,x} u_z + T_2 E_{0,y} q_z u_z. \end{aligned} \quad (5.17)$$

При преобразовании зеркального отражения  $S_4$  функция  $u_0 \cos \pi v z/a$  в (5.16) меняет знак аналогично амплитуде  $u_z$  в (5.17), а функция  $u_0 \sin \pi v z/a$  и произведение  $q_z u_z$  не меняются. Поэтому размерно-квантованные оптические моды с нечетными  $v$  наблюдаются в геометрии скрещенных поляризатора и

анализатора  $z(x, y)\bar{z}$  или  $z(y, x)\bar{z}$ , где  $x \parallel [100]$ ,  $y \parallel [010]$ . Моды с четными  $\nu$  рамановски активны в параллельной конфигурации  $z(x, x)\bar{z}$  или  $z(y, y)\bar{z}$ .

В рассеяние  $n \rightarrow n'$  электронно-дырочного возбуждения на продольном оптическом фоне, т. е. в рассеяние, описываемое матричным элементом  $V_{n'n}$  в (5.14), вносят вклад два механизма: фрелиховский (дальнодействующий) и деформационный. В первом механизме  $LO$ -фонон воздействует на электронную подсистему через скалярный потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  электрического поля, индуцированного оптическим колебанием решетки. Соответствующий оператор взаимодействия имеет вид:

$$V = e[\varphi(\mathbf{r}_e) - \varphi(\mathbf{r}_h)], \quad (5.18)$$

где  $\mathbf{r}_{eh}$  — радиус-вектор электрона или дырки;  $e$  — заряд электрона ( $e < 0$ ). При возбуждении вблизи края фундаментального поглощения в квантовой яме основной вклад в рассеяние вносят промежуточные состояния  $e1-h1$ . Запишем огибающую двухчастичной волновой функции в виде  $f_n(\rho) \varphi_{e1}(z_e) \varphi_{h1}(z_h)$ , где  $f_n(\rho)$  — огибающая относительного движения электрона и дырки в плоскости интерфейсов в экситонных состояниях и электронно-дырочных состояниях из континуума. Тогда при рассеянии на  $LO$ -фоне имеем:

$$V_{n'n} = e \delta_{n'n} \int \left[ \varphi_{e1}^2(z) - \varphi_{h1}^2(z) \right] \varphi(z) dz. \quad (5.19)$$

При симметричных одночастичных огибающих  $\varphi_{e1}(z)$ ,  $\varphi_{h1}(z)$  этот интеграл отличен от нуля лишь для симметричного потенциала  $\varphi(z)$  согласно сформулированным выше правилам отбора для рассеяния в параллельной конфигурации. Интересно отметить, что при идентичных зонных параметрах электрона и дырки, когда огибающие  $\varphi_{e1}(z)$  и  $\varphi_{h1}(z)$  тождественны, фрелиховский механизм не дает вклада в рассеяние.

Деформационный механизм проявляется в недиагональном рассеянии  $z(xy)\bar{z}$  или  $z(yx)\bar{z}$  на продольных оптических колебаниях симметрии  $B_2$ . Если для простоты анализа учесть в (5.14) в качестве состояний  $n, n'$  электронно-дырочные возбуждения с нулевыми латеральными волновыми векторами ( $k_{ex} = k_{ey} = 0$  и  $k_{hx} = k_{hy} = 0$ ), то матричный элемент  $V_{n'n}$  отличен от нуля только для межподзонных переходов с изменением проекции углового момента дырки на  $\pm 2$ . В результате составной трехквантовый матричный элемент оказывается пропорциональным комбинации  $e_{2x}^* e_{1y} + e_{2y}^* e_{1x}$  произведений компонент векторов поляризации  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_1$ .

## 5.6. Рассеяние света на «сложенных» акустических фононах

Для описания фотоупругого механизма рассеяния света на «сложенных» акустических фононах учтем, что в разложении (5.8) для  $\delta\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$  фотоупругие коэффициенты  $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial\chi_{\alpha\beta}/\partial u_{\gamma\delta}$  в сверхрешетке зависят от координаты  $z$ , скачком изменяя свои значения при переходе через интерфейс и сохраняя их в пределах однородного слоя [43]. Как указывалось в п. 5.2, рассеяние света определяется фурье-компонентой

$$\delta\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) = \frac{1}{V} \int \delta\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (5.20)$$

где  $\mathbf{q}$  — переданный волновой вектор  $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ . Имея в виду рассмотреть рассеяние на  $LA$ -фононах в параллельной конфигурации  $z(xx)\bar{z}$  или  $z(yy)\bar{z}$ , сосредоточимся на анализе коэффициента  $P_{xxzz} = P_{12}$ , связывающего  $\delta\chi_{xx}$ ,  $\delta\chi_{yy}$  с  $u_{zz}$ . Обозначим его значения в слоях  $A$  и  $B$  в виде  $P_A$ ,  $P_B$  соответственно. Разложим функцию  $P_{12}(z)$  в ряд Фурье

$$P_{12}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P^{(m)} e^{iG_m z}, \quad (5.21)$$

где  $G_m = 2\pi m/d$  и

$$P^{(0)} = \frac{1}{d} (aP_A + bP_B), \quad (5.22)$$

$$P^{(m)} = \frac{1}{\pi m} \sin \frac{\pi m a}{d} (P_A - P_B) \quad (m \neq 0).$$

Для блоховской волны, распространяющейся в сверхрешетке и имеющей волновой вектор  $K$ , зависимость  $u_z(z)$  можно представить в виде суперпозиции пространственных гармоник  $K + G_m$ . Оценки показывают, что при рассеянии в сверхрешетках типа GaAs/AlGaAs пространственная модуляция фотоупругого коэффициента играет более существенную роль, чем смешивание пространственных гармоник в акустическом фоне. Поэтому в качестве функции  $u_z(z)$  в (5.8) можно подставить невозмущенный оператор

$$u_z(z) = \left( \frac{\hbar}{2\rho\Omega_{IK}V} \right)^{1/2} \left( b_Q e^{iQz} + b_Q^\dagger e^{-iQz} \right). \quad (5.23)$$



Здесь  $l$  — номер акустической минизоны (см. гл. 2);  $Q = \pm K + (2\pi|l|/d)$  и предполагается, что  $K > 0$ ; частота  $\Omega_{lK}$  определяется согласно (2.51), где скорость  $S$  можно заменить на  $s_A$  или  $s_B$ ;  $b_Q^\dagger$ ,  $b_Q$  — операторы рождения и уничтожения фонона с волновым вектором  $Q = (0, 0, Q)$ . Представление вторичного квантования используется для того, чтобы можно было корректно усреднять квадрат  $|\delta\chi(q)|^2$ . Напомним, что в термодинамически равновесном состоянии справедливы следующие выражения для средних

$$\langle b_Q b_Q^\dagger \rangle = 1 + N, \quad \langle b_Q^\dagger b_Q \rangle = N, \quad (5.24)$$

где  $N$  — среднее число заполнения фононного состояния, равное  $[\exp(\hbar\Omega/k_B T) - 1]^{-1}$ ;  $\Omega$  — частота фонона;  $k_B$  — постоянная Больцмана;  $T$  — абсолютная температура. Подставляя разложение (5.21) для  $P_{12}(z)$  и выражение (5.24) для  $u_z(z)$  в (5.8) и учитывая, что  $u_{zz} = \partial u_z / \partial z$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta\chi_{zz}(z) = iQ \left( \frac{\hbar}{2\rho\Omega_{lK}V} \right)^{1/2} \times \\ \times \left( b_Q e^{iQz} - b_Q^\dagger e^{-iQz} \right) \sum_m P^{(m)} e^{iG_m z}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

В сверхрешетке закон сохранения волнового вектора в направлении оси  $z$  выполняется с точностью до  $G_m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В короткопериодной сверхрешетке волновой вектор света мал по сравнению с обратным периодом и закон сохранения  $K = q$  выполняется точно. В этом можно убедиться, умножая (5.25) на  $\exp(iqz)/V$  и интегрируя по  $z$ :

$$\delta\chi_{zz}(q) = -iQ \left( \frac{\hbar}{2\rho\Omega_{lK}V} \right)^{1/2} b_Q^\dagger P^{(l)},$$

где оставлено лишь слагаемое, пропорциональное оператору рождения фонона и ответственное за процесс рассеяния в стоксову область спектра. Опуская дальнейшие выкладки, приведем ответ для спектральной интенсивности рассеянного света:

$$\begin{aligned} I(e_2, \omega_2 | e_1, \omega_1) \propto |e_2^* e_1|^2 \left( \frac{2\pi|l|}{d} \pm K \right) \times \\ \times (N+1) P^{(l)2} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \Omega_{lK}) \delta_{q_1, q_2 + K}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Заметим, что в аргументе  $\delta$ -функции, т. е. в законе сохранения энергии, учитывается точная дисперсия «сложенных» акустических фононов, так как на опыте спектральный сдвиг измеряется с высокой точностью. В то же время другие множители можно рассматривать, пренебрегая различием между точной и приближенной дисперсионными кривыми, изображенными на рис. 5 сплошной и пунктирной линиями. Это допустимо, когда композиционные материалы в гетеропаре не слишком сильно различаются по плотности  $\rho$  и скорости звука  $s$ .

## 5.7. Двойной оптический резонанс

В оптической спектроскопии двойным резонансом в условиях вторичного свечения называется возрастание интенсивности излучения, которое имеет место при одновременном выполнении двух условий: 1) энергии первичного и вторичного фотонов  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  совпадают с энергиями двух электронных межзонных возбуждений; 2) разность  $\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2$  равна энергии одного или нескольких (двух, трех) оптических фононов. Как правило, в роли указанных электронных возбуждений выступают экситонные состояния. Эффект двойного оптического резонанса, который можно описывать как в терминах резонансного комбинационного рассеяния, так и на языке резонансной фотолюминесценции, наблюдался и в объемных полупроводниках, и в структурах с квантовыми ямами. В объемном GaAs двойной оптический резонанс был реализован посредством одноосной деформации, которая приводит к расщеплению валентных подзон тяжелых и легких дырок. Кроме того, двойной оптический резонанс наблюдался в квантующем магнитном поле в результате формирования уровней Ландау. В полумагнитном полупроводнике  $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$  условия двойного резонанса достигались во внешнем магнитном поле, которое вызывает гигантское расщепление спиновых дырочных состояний благодаря обменному взаимодействию дырок с магнитными ионами Mn. В полупроводниковых наноструктурах появляются новые возможности для реализации двойного резонанса. В частности, резонансными состояниями в канале возбуждения и канале излучения могут служить  $1s$ -экситоны, привязанные к различным подзонам размерного квантования. Мы рассмотрим здесь еще один механизм двойного оптического резонанса, наблюдаемого на  $2s$ - и  $1s$ -экситонах, принадлежащих к одной экситонной серии  $e1-hh1$ . В дальнейшем энергетическое расстояние  $2s-1s$  будем обозначать в виде  $\hbar\omega_{21}$ . Гетеропары на основе GaAs не подходят для наблюдения  $2s-1s$  двойного оптического резонанса,

так как в объемном GaAs энергия связи экситона, а значит, и энергетическое расстояние  $2s—1s$  в несколько раз меньше энергии оптического фонона  $\hbar\Omega_{LO} \approx 37$  мэВ. Подходящим объектом являются структуры с квантовыми ямами, выращенными на основе CdTe в силу следующих обстоятельств: а) в объемном CdTe энергия оптического фонона сравнительно невелика и составляет 21.2 мэВ; б) в квантовых ямах CdTe/Cd<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>Te расстояние  $\hbar\omega_{21}$  заметно возрастает в результате эффекта размерного квантования и отличается от  $\hbar\Omega_{LO}$  всего на несколько миллиэлектронвольт; в) в магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel z$  уровень  $2s$ -экситона испытывает значительный диамагнитный сдвиг, вследствие которого второе условие двойного резонанса выполняется в умеренном поле, доступном в лабораторных условиях.

На рис. 44 квадратами показана зависимость энергетического расстояния  $\hbar\omega_{21}$  от магнитного поля, измеренная при низкой температуре в образце, содержащем 50 квантовых ям из CdTe шириной 85 Å каждая, разделенных барьерами из Cd<sub>0.86</sub>Mn<sub>0.14</sub>Te шириной 95 Å. Положения  $2s$ - и  $1s$ -резонансов определялись из спектров возбуждения фотолюминесценции при регистрации в области излучения экситона, связанного на

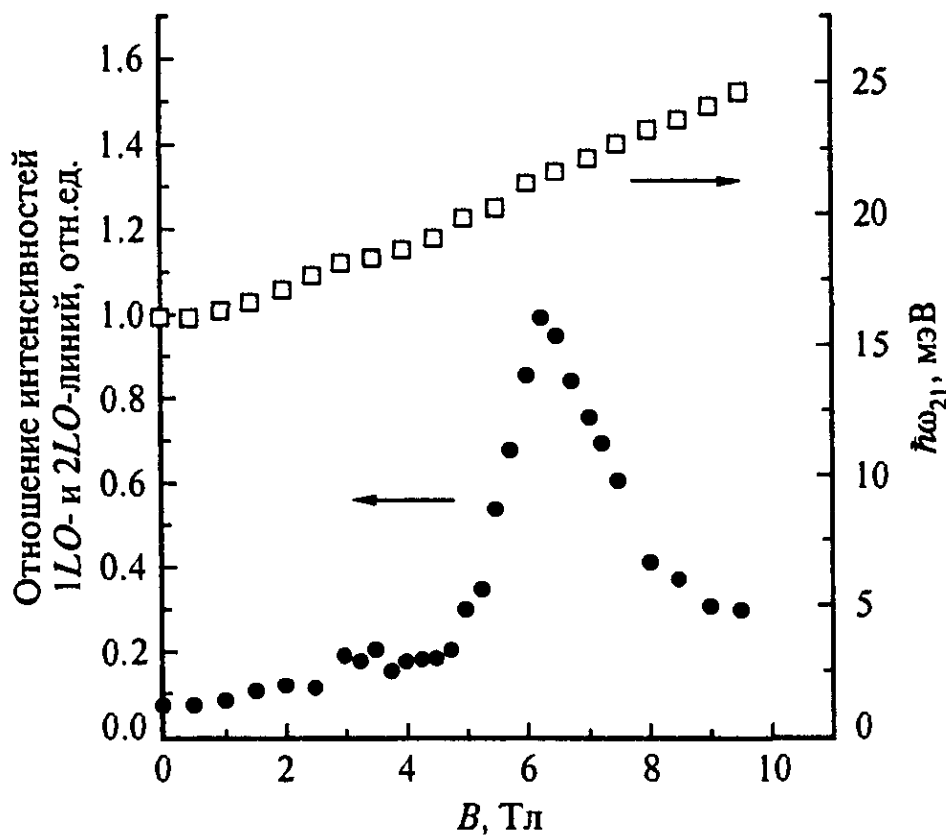


Рис. 44. Зависимость отношения интенсивностей  $1LO$ - и  $2LO$ -линий (кружки) и энергетического расстояния  $2s—1s$  (квадратики) от продольного магнитного поля в структуре с квантовыми ямами CdTe/Cd<sub>0.86</sub>Mn<sub>0.14</sub>Te 85Å/95Å [44].

нейтральном акцепторе (комплекс  $A^0 X$ ). Значение  $\hbar\omega_{21}$  меняется от 16.2 мэВ в отсутствие поля до 25 мэВ при индукции магнитного поля  $B=9.4$  Тл, двойной резонанс достигается при  $B=6.25$  Тл. Интенсивность линии  $\omega_2 = \omega_1 - 2\Omega_{LO}$  практически не меняется вплоть до  $B=4$  Тл и монотонно возрастает на  $\sim 50\%$  при увеличении поля до 9.4 Тл. Напротив, линия  $1LO$  демонстрирует яркое резонансное поведение, ее интенсивность в резонансе возрастает на порядок величины. Кружками на рис. 44 показана полевая зависимость отношения интенсивностей  $1LO$  и  $2LO$  повторений, определенных из спектров возбуждения при регистрации в области полосы излучения локализованных экситонов. Эта зависимость убедительно иллюстрирует эффект двойного оптического резонанса  $2s \rightarrow 1s$ .

## 6. НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА. ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ ОПТИЧЕСКОЕ СМЕШИВАНИЕ

Как отмечалось в п. 3.4.3, квантование фотона в микрорезонаторе со встроенной квантовой ямой открыло путь для дальнейшего значительного увеличения коэффициента экситон-фотонной связи. Особый интерес квантовые микрорезонаторы представляют для нелинейной оптики, поскольку нелинейный отклик по сравнению с линейным намного чувствительнее к возрастанию коэффициента связи. В данной главе будет рассмотрено вырожденное, или двухпучковое, четырехволновое смешивание в полупроводниковом микрорезонаторе с квантовой ямой, помещенной между брэгговскими зеркалами. В настоящее время это нелинейное оптическое явление широко исследовано в объемных кристаллах и структурах с квантовыми ямами. Два последовательных когерентных импульса с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  порождают динамическую дифракционную решетку с волновым вектором  $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ , на которой происходит рассеяние одного из пучков в направлении  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ . В альтернативном процессе нелинейного взаимодействия два фотона  $\mathbf{k}_2$  возбуждают биекситон, который далее распадается под действием импульса  $\mathbf{k}_1$  на фотоны  $\mathbf{k}_1$  и  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ . На опыте оба механизма можно разделить, используя линейно и циркулярно поляризованные пучки.

Мы изучаем многослойную гетероструктуру, выращенную с использованием пяти композиционных материалов —  $A, B, C_1, C_2, D$  и состоящую из  $N_l$  пар слоев  $C_2/C_1$  распределенного брэгговского отражателя, активного слоя  $B$  с квантовой ямой  $A$  в центре и  $N_r$  пар слоев  $C_1/C_2$  правого зеркала, выращенного на подложке  $D$ . Оптические свойства диэлектрических зеркал характеризуются амплитудными коэффициентами  $r_{mj}, r'_{mj}$  отражения и коэффициентами пропускания  $t_{mj}, t'_{mj}$  через зеркало  $j$ . Предполагается, что поглощение в брэгговских отражателях отсутствует, т. е.

$$(n_{\text{ext}, j} / n_c) |t_{mj}|^2 = (n_c / n_{\text{ext}, j}) |t'_{mj}|^2 = 1 - |r_{mj}|^2 = 1 - |r'_{mj}|^2,$$

где  $n_{\text{ext},j}$  — показатель преломления внешней среды, примыкающей к зеркалу  $j$  (в частности,  $n_{\text{ext},1} = 1$ ), а также что эти отражатели достаточно совершенны, т. е.  $1 - |r_{mj}|^2 \ll 1$ .

Представим электрическое поле излучения, падающего на структуру со стороны вакуума, в виде произведения экспоненциальной функции, осциллирующей на несущей частоте  $\tilde{\omega}$ , и медленно меняющейся амплитуды

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\tilde{\omega}t} [\mathbf{E}_{0,1}(t)e^{ik_1r} + \mathbf{E}_{0,2}(t)e^{ik_2r}] + \text{к.с.}, \quad (6.1)$$

где к. с. обозначает комплексно сопряженные члены.

Для определенности будем считать, что волновые векторы  $\mathbf{k}_j$  ( $j=1, 2$ ) лежат в плоскости  $(x, z)$ :  $\mathbf{k}_j = (k_{jx}, 0, k_{jz})$ . Обычно в экспериментах по четырехволновому смешиванию векторы  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  образуют малые углы с главной осью структуры  $z$ , что позволяет пренебречь влиянием  $z$ -компоненты электрического поля и не учитывать угловую зависимость коэффициентов пропускания, отражения и нелинейного смешивания. В дальнейшем мы опускаем фазовые множители  $\exp(ik_{j,x}x)$  и считаем амплитуды волн скалярными величинами, помня, что  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  обозначают амплитуды волн  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3 = 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ , определяемые независимо. Средняя поляризация в квантовой яме и электрическое поле в центре ямы записываются в виде:

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-i\tilde{\omega}t} \tilde{P}(t) + \text{к.с.}, \\ E(t) &= e^{-i\tilde{\omega}t} \tilde{E}(t) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Согласно (3.148), (3.150), (3.196а), (3.197), (3.206), (3.208), динамика фотонной моды в микрополости и экситона в квантовой яме описывается в рамках модели двух связанных осцилляторов:

$$\left[ \frac{d}{dt} + i(\omega_0 - \tilde{\omega}) + \Gamma \right] \tilde{P}(t) = i\xi\Gamma_0 \tilde{E}(t) + F_{NL}(t), \quad (6.3a)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} + i(\bar{\omega} - \tilde{\omega}) + \bar{\gamma} \right] \tilde{E}(t) = \bar{\Gamma} \left[ \frac{i}{\xi} \tilde{P}(t) + \frac{t'_{ml}}{2} \tilde{E}_0(t) \right]. \quad (6.3b)$$

Здесь  $\omega_0$  и  $\bar{\omega}$  — резонансные частоты экситона и фотонной моды;  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  — нерадиационное и радиационное затухания экситона в одиночной квантовой яме;  $\bar{\gamma}$  — затухание фотонной моды, определяемое темпом ухода через левое и правое зеркала;  $\bar{\Gamma} = 8\bar{\gamma}(2 - R_{ml} - R_{mr})^{-1}$ ;  $\tilde{E}_0(t)$  — медленно меняющаяся амплитуда падающего излучения. В (6.3) также использовано обозна-

чение  $\xi = \epsilon_b / (2\pi k a)$ , введенное ранее в (3.148), где  $k = (\omega_0 / c) n_c$ ;  $\epsilon_b$  — фоновая диэлектрическая проницаемость материала квантовой ямы;  $n_c$  — показатель преломления активного слоя  $B$ . Различием между  $n_c^2$  и  $\epsilon_b$  пренебрегаем. Система уравнений (6.3) получается из уравнений (3.196а) и (3.208) в результате почленного умножения последних на  $-i$ , замены  $\omega$  на  $i(d/dt) - \tilde{\omega}$  и включения нелинейного слагаемого в правую часть уравнения для  $P$ .

Нелинейное слагаемое  $F_{NL}(t)$  наводит поляризацию третьего порядка. Рассмотрим последовательно: нелинейные вклад типа  $P^2 E$  (аналогичный вклад описывает насыщение обычной двухуровневой системы), ангармонический вклад типа  $P^3$ , для которых

$$F_{NL}(t) = i \tilde{P}_1^*(t) \tilde{P}_2(t) [\beta_1 \tilde{P}_2(t) + \beta_2 \tilde{E}_2(t)], \quad (6.4)$$

а также биэкситонный механизм с  $F_{NL}(t) = i\gamma_{bi} B(t) \tilde{E}_1^*(t)$ , где  $B$  — амплитуда биэкситонной волновой функции. Для нее должно быть записано дополнительное уравнение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i \left[ 2(\omega_0 - \tilde{\omega}) - \delta_{bi} \right] + \Gamma_{bi} \right\} B(t) = -i\gamma_{bi} \tilde{P}_2(t) \tilde{E}_2(t), \quad (6.5)$$

где  $\hbar\delta_{bi}$ ,  $\Gamma_{bi}$  — энергия связи и затухание биэкситона. Уравнения (6.3а), (6.3б) играют роль уравнений Максвелла—Блоха, используемых при описании четырехволнового смешивания в объемных материалах.

### 6.1. Нелинейность типа «насыщение двухуровневых переходов»

Процедура расчета сигнала четырехволнового смешивания включает решение:

а) линейных уравнений (6.3) для поляризации  $\tilde{P}_1$  и поля  $\tilde{E}_1$  волны  $\mathbf{k}_1$ , индуцированных падающим импульсом  $E_{0,1}$ ;

б) линейных уравнений (6.3) для отклика системы  $\tilde{P}_2$ ,  $\tilde{E}_2$  на импульс  $E_{0,2}$ ;

в) линейных уравнений для  $\tilde{P}_3$ ,  $\tilde{E}_3$  рассеянной волны с неоднородным источником в форме (6.4) при  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$ . Выходящее электрическое поле связано с полем в центре квантовой ямы простым соотношением  $\tilde{E}_j(t) = (t_{mj}/2) \tilde{E}_3(t)$ .

**Структура с одиночной квантовой ямой.** Вначале рассмотрим четырехволновое смешивание в структуре с одиночной ямой. Уравнение для средней поляризации в яме имеет вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + i(\omega_0 - \tilde{\omega}) + \Gamma \right] \tilde{P}(t) = i\xi\Gamma_0 \tilde{E}(t) + F_{NL}(t), \quad (6.6)$$

а поле в центре ямы связано с  $\tilde{P}(t)$  соотношением

$$\tilde{E}(t) = \frac{i}{\xi} (1 + r_0 e^{2i\varphi}) \tilde{P}(t) + t'_0 \tilde{E}_0(t), \quad (6.7)$$

где  $\varphi = kL$ ;  $L$  — расстояние между центром ямы и границей образца с вакуумом;  $r_0 = (n_c - 1)/(n_c + 1)$ ;  $t'_0 = 2/(n_c + 1)$ ;  $n_c$  — показатель преломления среды;  $\tilde{E}_0(t)$  — электрическое поле падающей волны. С учетом (6.7) уравнение (6.6) можно переписать в виде:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + i(\omega_0 - \tilde{\omega}) + \Gamma' \right] \tilde{P}(t) = i\xi\Gamma_0 t'_0 \tilde{E}_0(t) + F_{NL}(t), \quad (6.8)$$

где  $\Gamma' = \Gamma + [1 + r_0 \exp(2i\varphi)]\Gamma_0$ .

Пусть  $\tilde{\omega} = \omega_0$ ,  $kL = \pi$  и длительность импульса мала по сравнению с  $(\Gamma')^{-1}$ . Тогда  $1 + r_0 \exp(2i\varphi) = 2n_c/(n_c + 1) \equiv t_0$  и

$$\tilde{P}_j(t) = i\xi\Gamma_0 t'_0 A_j e^{-\Gamma'(t-t_j)}, \quad \tilde{E}_j(t) = \frac{i}{\xi} t_0 \tilde{P}_j(t); \quad (6.9)$$

$$A_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{0,j}(t) dt, \quad (6.10)$$

где  $j = 1, 2$ ;  $t_j$  — время прихода  $j$ -го импульса. Далее предполагается, что  $t_2 > t_1$ . Для функции  $F_{NL}(t)$  получаем:

$$F_{NL}(t) = i\beta_2 \xi^2 (\Gamma_0 t'_0)^3 A_1 A_2^2 t_0 e^{-\Gamma'\tau} e^{-3\Gamma'(t-t_2)}, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Решая уравнение для  $\tilde{E}_3(t)$ , находим:

$$\tilde{E}_3(t) = i\beta_2 \xi^2 (\Gamma_0 t'_0)^3 A_1 A_2^2 t_0 \frac{1}{-2\Gamma'} e^{-\Gamma'\tau} e^{-3\Gamma'(t-t_2)}, \quad (6.11)$$

откуда для интегрального сигнала на выходе имеем:

$$S_3(\tau) = t_0^2 \int_{t_2}^{\infty} |\tilde{E}_3(t)|^2 dt = S e^{-\Gamma'\tau}, \quad (6.12)$$

$$S = \frac{2}{3} \left( \xi \beta_2 A_1 A_2^2 \right)^2 \left( \frac{n_c}{n_c + 1} \right)^4 \left( \frac{2}{n_c + 1} \right)^6 \frac{\Gamma_0^6}{\Gamma'^3}. \quad (6.13)$$



**Квантовый микрорезонатор.** Аналитические результаты могут быть получены при условии двойного резонатора  $\tilde{\omega} = \omega_0 = \bar{\omega}$ . Для достаточно коротких импульсов, таких что значение  $|\omega_{\pm} - \bar{\omega}|$  мало по сравнению с обратной длительностью импульса  $\tau_p^{-1}$ , в отклике можно ограничиться только слагаемыми, содержащими долгоживущие экспоненциальные функции  $\exp(-i\omega_{\pm}t)$ . В этом приближении для нелинейного источника получаем:

$$F_{NL}(t) = i\theta(t + \tau)\theta(t)F_{NL}^{(0)}e^{-\gamma t}e^{-3\gamma\tau} \times \\ \times \sin[\Omega(t + \tau)] \sin \Omega t (\cos \Omega t - s \sin \Omega t), \quad (6.14)$$

$$F_{NL}^{(0)} = \frac{1}{8}\beta_2(t'_{ml}\tilde{\Gamma})^3 \left( \xi \frac{\Gamma_0}{\Omega} \right)^2 A_1 A_2^2, \quad A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{0,n}(t) dt,$$

где в обозначении половины расщепления Раби  $\tilde{\Omega}$  опущен знак «тильда»;  $\gamma = (\Gamma + \bar{\gamma})/2$ ;  $s = (\bar{\gamma} - \Gamma)/2\Omega$ ;  $\tau = t_2 - t_1$  — временная задержка между приходом первого и второго импульса, а также положено  $t_2 = 0$ . В соответствии с (6.14) электрическое поле дифрагированной волны  $2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  может быть представлено в виде:

$$\tilde{E}_3(t) = e^{-\gamma t} [f_1(t) \cos \Omega \tau + f_2(t) \sin \Omega \tau], \quad (6.15)$$

где функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  не зависят от  $\tau$ . Проинтегрированная по времени интенсивность волны 3 принимает вид

$$S_3(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{E}_3(e)|^2 dt = S e^{-2\gamma\tau} [1 + a \sin(2\Omega\tau + \phi_0)]. \quad (6.16)$$

Таким образом, интегральный нелинейный сигнал  $S_3(\tau)$  состоит из двух затухающих слагаемых — монотонного и осциллирующего. Параметры  $S$ ,  $a$ ,  $\phi_0$  в выражении (6.16) определяют соответственно значение монотонного вклада при нулевой задержке, относительную амплитуду и начальную фазу осциллирующего вклада. Расчет показывает, что модуляция сигнала оказывается значительной в широком диапазоне значений безразмерных параметров  $X = \Omega/\gamma$  и  $Y = (\bar{\gamma} - \Gamma)/2\gamma$ .

Если  $\gamma$  мало по сравнению с расщеплением Раби (режим сильной экситон-фотонной связи), то для  $S$ ,  $a$  и  $\phi_0$  могут быть получены простые аналитические выражения. Пренебрегая слагаемыми высших порядков по  $\gamma/\Omega$ , находим:

$$S = \frac{1}{12} \frac{1}{(8\gamma)^3} \left( \frac{\bar{\Gamma} |F_{NL}^{(0)}|}{\xi \Omega} \right)^2, \quad a(X, Y) = \frac{6 - 4Y}{X}, \quad \phi_0 = 0. \quad (6.17)$$

Сравнение показывает, что при  $X \geq 4$  приближенная формула для параметра  $a$  хорошо воспроизводит результаты численного расчета. Учитывая, что нелинейные сигналы в геометрии на отражение и пропускание связаны с  $S_3(\tau)$  соотношениями  $S_{3,j}(\tau) = |t_{mj}|^2 S_3(\tau)/4$ , получаем:

$$S_{3,j}(0) = \frac{1}{12} \frac{n_{\text{ext},l}^3}{n_c^2 n_{\text{ext},j}} \frac{\bar{\gamma}_j \bar{\gamma}_l^3 \Omega^2}{(8\gamma)^3} \left( \xi \beta_2 A_1 A_2^2 \right)^2. \quad (6.18)$$

## 6.2. Нелинейность ангармонического вида

Проводя аналогичное рассмотрение для ангармонического механизма нелинейности в режиме сильной экситон-фотонной связи, получаем:

$$S_3(\tau) = S' e^{-2\gamma\tau} \left( 1 + \frac{4}{5} \cos 2\Omega\tau \right), \quad S' = S \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\xi \Gamma_0}{\Omega} \right)^2, \quad (6.19)$$

где  $S$  задано выражением (6.17). Заметим, что в отличие от рассмотренного выше механизма нелинейности относительная амплитуда осциллирующей компоненты в формуле (6.19) оказывается постоянной, а фаза сдвинута на  $\pi/2$ .

## 6.3. Биэкситонный механизм нелинейности

Этот механизм не вносит вклада в четырехволновое смешивание при циркулярной поляризации возбуждения, однако играет важную роль в формировании дифрагированного сигнала при линейной поляризации импульсов. При резонансе  $\bar{\omega} = \bar{\omega} = \omega_0$  и в случае коротких импульсов амплитуда биэкситонной волновой функции, индуцированная вторым импульсом, может быть записана в виде интеграла

$$B(t) = -i\gamma_{bi} \theta(t) \int_0^t dt' \exp [-(\Gamma_{bi} - i\delta_{bi})(t - t')] \tilde{P}_2(t') \tilde{E}_2(t'), \quad (6.20)$$

а нелинейный источник принимает вид

$$F_{NL}(t) = \gamma_{bi}^2 \theta(t) \tilde{E}_1^*(t) \int_0^t dt' \exp[-(\Gamma_{bi} - i\delta_{bi})(t - t')] \tilde{P}_2(t') \tilde{E}_2(t'). \quad (6.21)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.3) для  $\tilde{P}(t)$ , мы можем далее рассчитать  $\tilde{E}_3(t)$  и  $S_3(\tau)$ .

#### 6.4. Обсуждение результатов расчета

В [45] проводился расчет для нелинейного процесса типа насыщения при резонансных условиях  $\bar{\omega} = \omega_0 = \omega_c$ . Использовались параметры  $\lambda$ -полости [46] с активным слоем из  $\text{Al}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{As}$  и брэгговскими отражателями, состоящими из 24 пар слоев из  $\text{Al}_{0.4}\text{Ga}_{0.6}\text{As}/\text{AlAs}$  со стороны вакуума и 33 пар слоев из  $\text{AlAs}/\text{Al}_{0.4}\text{Ga}_{0.6}\text{As}$  со стороны подложки:  $n_{\text{ext},r} = 3.63$ ,  $n_1 = 3.17$ ,  $n_2 = 3.45$ ,  $n_c = 3.54$ ,  $n_{\text{ext},l} = 1$ . Предполагалось, что в центр активного слоя встроена одиночная квантовая яма с параметрами экситона  $\Gamma = 1.0 \text{ пс}^{-1}$  и  $\Gamma_0 = 0.05 \text{ пс}^{-1}$ . Для такой структуры вычисленные значения  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\Gamma}$  равны соответственно 0.51 и 117  $\text{пс}^{-1}$ , а расщепление Раби  $2\Omega$  составляет 4.8  $\text{пс}^{-1}$ . Сигнал представляет собой квантовые биения между экситонной и фотонной модами со значительной модуляцией как по оси  $t$ , так и по оси  $\tau$ . Сравнение со структурой с одиночной квантовой ямой и покрывающим слоем толщиной  $d$ , удовлетворяющей условию  $kd = \pi$ , показывает, что локализация фотонной моды в микрорезонаторе с помощью брэгговских отражателей приводит к усилению нелинейного сигнала на  $4 \div 5$  порядков. В соответствии с (6.16) интегральный сигнал представляет собой затухающие осцилляции с единственным периодом. В случае формирования нелинейной волны через биэкситон при  $\Omega \gg \delta_{bi}$   $2\Omega$ -осцилляции промодулированы вторым периодом  $T_{bi} = 2\pi/\delta_{bi}$ , определяемым биэкситонной энергией связи. При сравнимых, но несоразмерных значениях  $\Omega$  и  $\delta_{bi}$  затухающие осцилляции в нелинейном сигнале носят нерегулярный характер.

Представленная теория может быть обобщена на случай структур с неоднородностями путем усреднения интенсивности нелинейного сигнала по распределению частот экситонного резонанса и фотонной моды. Качественно возможные последствия неоднородного уширения могут быть прослежены по тому

влиянию, какое оказывает на нелинейный сигнал расстройка между резонансными частотами фотонной моды в микрополости и экситона в квантовой яме: с ростом расстройки амплитуда сигнала падает при одновременном увеличении частоты модуляции.

Таким образом, мы рассмотрели вырожденное четырехволновое смешивание в микрорезонаторах с квантовыми ямами. Последовательно проанализированы процессы нелинейного взаимодействия, аналогичные возникающим при насыщении двухуровневых переходов и при колебаниях ангармонического осциллятора, а также биекситонный механизм нелинейности. Основные уравнения, описывающие динамику фотонной моды и диэлектрической поляризации экситона в квантовой яме, решены в режиме сильной экситон-фотонной связи для коротких световых импульсов. Для первых двух типов нелинейностей сигнал четырехволнового смешивания состоит из монотонной и осциллирующей компонент, убывающих экспоненциально с показателем, определяемым суммой фотонного и экситонного затуханий. Осцилляции для биекситонной нелинейности включают затухающие обертоны  $2\Omega$  и  $\delta_{bi}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вывода материального соотношения (3.138) введем зависящую от времени волновую функцию  $|t\rangle$  электронной системы, находящейся в поле монохроматической волны с фиксированной плоскостью линейной поляризации  $\alpha$ . Предполагается, что частота света  $\omega$  близка к частоте экситонного резонанса  $\omega_0$  и правила отбора допускают резонансное фотовозбуждение экситона  $|\text{exc}\rangle$ , описываемого двухчастичной огибающей  $\psi_{\text{exc}}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h)$ . В линейном приближении имеем

$$|t\rangle = |0\rangle + c(t)|\text{exc}\rangle, \quad c(t) = c_0 e^{-i\omega t} + c'_0 e^{i\omega t}, \quad (\text{П.1})$$

где  $|0\rangle$  — основное состояние электронной системы. В дальнейшем нерезонансным слагаемым  $c'_0 e^{i\omega t}$  пренебрегаем.

По определению экситонный вклад в диэлектрическую поляризацию равен квантово-механическому среднему

$$P_{\text{exc}}(\mathbf{r}, t) = \langle t | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | t \rangle = \langle \text{exc} | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | 0 \rangle c^*(t) + \text{к. с.}, \quad (\text{П.2})$$

где  $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$  — оператор плотности дипольного момента; индекс  $\alpha$  указывает проекцию вектора  $\hat{\mathbf{d}}$ , задаваемую плоскостью поляризации падающего света. Матричный элемент  $\langle \text{exc} | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | 0 \rangle$  можно выразить через аналогичный матричный элемент оператора плотности тока  $\hat{j}_\alpha(\mathbf{r})$ , который, в свою очередь, выражается через межзонный матричный элемент  $p_{cv}$  оператора импульса:

$$\langle \text{exc} | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | 0 \rangle = \frac{\langle \text{exc} | \hat{j}_\alpha(\mathbf{r}) | 0 \rangle}{i\omega_0} = \frac{ep_{cv}}{i\omega_0 m_0} \psi_{\text{exc}}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (\text{П.3})$$

Для экситона с тяжелой дыркой в структурах с квантовыми ямами, выращенных на основе полупроводников с решеткой цинковой обманки, матричный элемент  $p_{cv}$  равен  $\langle S | \hat{p}_x | X \rangle$ , где  $\hat{p}_x = -i\partial/\partial x$ ;  $S$  — электронная блоховская функция на дне зоны

проводимости (симметрия  $\Gamma_1$ );  $X$  — одна из трех блоховских функций симметрии  $\Gamma_{15}$  для электрона в валентной зоне. При нормальном падении света электрическое поле и экситонная поляризация не зависят от координат в плоскости интерфейсов:

$$E(\mathbf{r}, t) = E(z) e^{-i\omega t} + \text{к. с.},$$

$$P_{\text{exc}}(\mathbf{r}, t) = P_{\text{exc}}(z) e^{-i\omega t} + \text{к. с.},$$

а огибающая волновой функции допускает представление

$$\psi_{\text{exc}}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) \equiv \varphi(\rho_e - \rho_h, z_e, z_h),$$

где  $\rho$  — составляющая трехмерного вектора  $\mathbf{r}$ , лежащая в плоскости  $(x, y)$ . Поэтому вместо (П.3) получаем:

$$\langle \text{exc} | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | 0 \rangle = -i \frac{ep_{cv}}{\omega_0 m} \varphi^*(0, z, z). \quad (\text{П.4})$$

Состояние  $|t\rangle$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = (\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}) |t\rangle, \quad \hat{V} = - \int d\mathbf{r} \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}, t), \quad (\text{П.5})$$

где  $\hat{\mathcal{H}}_0$  — гамильтониан невозмущенной электронной системы. Умножая это уравнение на  $\langle \text{exc} |$ , приходим к линейному уравнению для коэффициента  $c_0$  в (П.1):

$$\hbar\omega c_0 = \hbar\omega_0 c_0 - S \int dz' \langle \text{exc}, \alpha | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}') | 0 \rangle E(z'), \quad (\text{П.6})$$

где  $S$  — площадь структуры в плоскости  $(x, y)$ . Умножим далее уравнение (П.6) почленно на  $\langle 0 | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | \text{exc} \rangle = \langle \text{exc} | \hat{d}_\alpha(\mathbf{r}) | 0 \rangle^*$ , учтем соотношения (П.2) между  $P_{\text{exc}}(\mathbf{r}, t)$  и  $c(t)$  и введем функцию

$$\Phi(z) = \sqrt{S} \varphi(0, z, z). \quad (\text{П.7})$$

В результате получим:

$$(\omega_0 - \omega) P_{\text{exc}}(z) = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{e|p_{cv}|}{\omega_0 m_0} \right)^2 \Phi(z) \int dz' \Phi(z') E(z'), \quad (\text{П.8})$$

что переходит в (3.138), если добавить к частоте  $\omega_0$  мнимую величину  $-i\Gamma$ , описывающую нерадиационное затухание экситона, а также ввести продольно-поперечное расщепление  $\omega_{LT}$  и боровский радиус  $a_B$  трехмерного экситона. Эти две величины удовлетворяют соотношению

$$\epsilon_b \omega_{LT} a_B^3 = \frac{4}{\hbar} \left( \frac{e |p_{cv}|}{\omega_0 m_0} \right)^2. \quad (\text{П.9})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Bastard G.* Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures. Les Ulis: Les Editions de Physique, 1988. 360 p.
2. *Pikus G., Ivchenko E.* Superlattices and other heterostructures: symmetry and optical phenomena. Springer Series in Solid-State Sciences. Vol. 110. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1995; 2d edition. 1997. 372 p.
3. *Mitin V. V., Kochelap V. A., Strosio M. A.* Quantum heterostructures: microelectronics and optoelectronics. Cambridge: University Press, 1999. 642 p.
4. *Glaude W., Borge V.* Quantum semiconductor structures (Fundamentals and applications). San Diego; New York; Boston; London; Sydney; Tokyo; Toronto: Academic Press, 1993.
5. *Воробьев Л. Е., Фирсов Д. А., Шалыгин В. А.* Оптические свойства полупроводников: Учеб. пособие. Л.: ЛПИ, 1989. 112 с.
6. *Semiconductor interfaces, microstructures and devices. Properties and applications* / Ed. by Z. C. Feng. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics, 1993.
7. *Ekenberg U.* // Phys Rev. B. 1989. Vol. 40. P. 7714.
8. *Manasreh M. O., Szmulowicz F., Vaughan T., Evans K. R., Stutz C. E., Fischer D. W.* // Intersubband transitions in quantum wells / Ed. by E. Rosencher et al. New York: Plenum Press, 1992.
9. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. 3-е изд. М.: Наука, 1992. 664 с.
11. *Kaufman D., Sa'ar A., Kuze N.* // Appl. Phys. Lett. 1994. Vol. 64. P. 254.
12. *Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф.* Электронные свойства двумерных систем. М.: Мир, 1985. 485 с.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1963. 704 с.
14. *Осипов В. В., Серженко Ф. Л., Шадрин В. Д.* // ФТП. 1989. Т. 23. С. 809.
15. *Шик А. Я.* // Двумерные электронные системы: Учеб. пособие. С.-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1993. 75 с.
16. *Шик А. Я.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. С. 40.
17. *Петров А. Г., Шик А. Я.* // ФТП. 1997. Т. 31. С. 666.
18. *Воробьев Л. Е., Зибик Е. А., Фирсов Д. А., Шалыгин В. А., Нащекина О. Н., Сайдашев И. И.* // ФТП. 1998. Т. 32. С. 849.
19. *Chen H. H., Wang Y.-H.* // IEEE Journ. of Quant. Electr. 1996. Vol. 32. P. 471—477.
20. *Воробьев Л. Е., Голуб Л. В., Донецкий Д. В.* // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. С. 928—932.
21. *Ансельм А. И.* Введение в физику полупроводников. М.: Наука, 1978. 616 с.
22. *Воробьев Л. Е.* Механизмы рассеяния носителей заряда в полупроводниках: Учеб. пособие. Л.: ЛПИ, 1988. 99 с.
23. *Helm M.* // Semicond. Sci. Technol. 1995. Vol. 10. P. 557.
24. *Зеегер К.* Физика полупроводников. М.: Мир, 1977. 616 с.
25. *Тауц Я.* Оптические свойства полупроводников. М.: Мир, 1967.



26. Zory P. S. Jr. Quantum well lasers. Boston: Academic Press, 1993.
27. Andreani L. C., Tassone F., Bassani F. // Solid State Commun. 1991. Vol. 77. P. 641.
28. Ивченко Е. Л. // ФТТ. 1991. Т. 33. С. 2388.
29. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1968. Ч. 1, гл. 6.
30. Srivinas V., Chen Y. J., Wood C. E. C. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. P. 12300.
31. Ивченко Е. Л., Несвижский А. И., Йорда С. // ФТТ. 1994. Т. 36. С. 2118.
32. Merle Y. d'Aubigne, Wasiela A., Mariette H., Dietl T. // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 54. P. 14003.
33. Harel R., Cohen E., Linder E., Ron Arza, Pfeiffer L. N. // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 53. P. 7868.
34. Ivchenko E. L., Kochereshko V. P., Kop'ev P. S., Kosobukin V. A., Uraltsev I. N., Yakovlev D. R. // Solid State Commun. 1989. Vol. 70. P. 529.
35. Nelson T. R. Jr., Lindmark E. K., Wick D. V., Tai K., Khitrova G., Gibbs H. M. // Microcavities and photonic bandgaps: physics and applications / Ed. by J. Rarity and C. Weisbuch. Kluwer: Dordrecht, 1996. P. 43.
36. Алейнер И. Л., Ивченко Е. Л. // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 55. С. 662.
37. Ivchenko E. L., Kaminski A. Yu. and Roessler U. // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 54. P. 5852.
38. Dzhioev R. I., Gibbs H. M., Ivchenko E. L., Khitrova G., Korenev V. L., Tkachuk M. N., Zakharchenya B. P. // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56. P. 13405.
39. Джюев Р. И., Захарченя Б. П., Корнев В. Л., Кусраев Ю. Г., Леденцов Н. Н., Устинов В. М., Жуков А. Е., Цацульников А. Ф. // ФТТ. 1998. Т. 40. С. 858.
40. Golub L. E., Ivanov S. V., Ivchenko E. L., Shubina T. V., Toropov A. A., Bergman J. P., Pozina G. R., Monemar B., Willander M. // Phys. Stat. Sol. (b). 1998. Vol. 205. P. 203.
41. Sood A. K., Menéndez J., Cardona M., Ploog K. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 2111.
42. Huang K., Zhu B. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. P. 13377.
43. Colvard C., Gant T. A., Klein M. V., Merlin R., Fischer R., Morkoc H., Gosard A. C. // Phys. Rev. B. 1985. Vol. 31. P. 2080.
44. Yakovlev D. R., Ossau W., Waag A., Landwehr G., Ivchenko E. L. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 52. P. 5773.
45. Fu Y., Willander M., Ivchenko E. L., Kiselev A. A. // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 749; Phys. Rev. B. 1997. Vol. 55. P. 9872.
46. Weisbuch C., Nishioka M., Ishikawa A., Arakawa Y. // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 3314.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Классификация гетероструктур</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1. Гетероструктуры: иерархия понятий . . . . .	6
1.2. Классификация сверхрешеток . . . . .	10
<b>2. Электроны, фононы, фотоны и экситоны в наноструктурах</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1. Размерное квантование электронных состояний в квантовых ямах . . . . .	12
2.2. Квантовые проволоки и квантовые точки . . . . .	16
2.3. Размерное квантование тяжелых и легких дырок . . . . .	19
2.4. Квантово-размерные электронные состояния в модели Кейна . . . . .	23
2.5. Метод матриц переноса. Электроны, фононы и фотоны в сверхрешетке. . . . .	25
2.5.1. Электроны . . . . .	27
2.5.2. Нормальные световые волны в оптических сверхрешетках . . . . .	29
2.5.3. «Сложенные» акустические фононы (фононы с «ломаным» спектром) . . . . .	32
2.6. Экситоны в квантовых ямах . . . . .	34
<b>3. Оптическое пропускание и отражение полупроводниковых гетероструктур</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1. Общие соотношения для коэффициента поглощения в одноэлектронном приближении . . . . .	38
3.2. Внутризонные оптические переходы в квантовых ямах . . . . .	42
3.2.1. Межподзонные переходы электронов . . . . .	42
3.2.2. Анизотропия диэлектрической проницаемости и двойное лучепреломление . . . . .	49
3.2.3. Эффект деполяризации . . . . .	53
3.2.4. «Фотоионизация» квантовых ям . . . . .	55
3.2.5. Влияние электрического поля на спектр внутризонного поглощения . . . . .	62
3.2.6. Межподзонные переходы дырок . . . . .	67
3.2.7. Внутривозонное поглощение света . . . . .	72
3.3. Оптические переходы между минзонами в сверхрешетках . . . . .	80
3.4. Межзонные оптические переходы в квантовых ямах . . . . .	88
3.5. Экситонные эффекты в спектрах отражения и пропускания . . . . .	95
3.5.1. Одиночная квантовая яма . . . . .	95
3.5.2. Структуры с периодическим набором квантовых ям . . . . .	111
3.5.3. Квантовые микрорезонаторы . . . . .	125
<b>4. Фотолюминесценция полупроводниковых наноструктур</b> . . . . .	<b>134</b>
4.1. Фотолюминесценция полупроводников . . . . .	134
4.2. Оптическая ориентация свободных носителей . . . . .	135

4.2.1. Поляризационные параметры световой волны . . . . .	135
4.2.2. Принципы оптической ориентации спинов свободных носителей . . . . .	137
4.3. Поляризованная люминесценция и тонкая структура экситонных уровней . . . . .	140
4.4. Основная идея квантовых биений . . . . .	144
4.5. Фотолюминесценция локализованных экситонов в режиме многократных туннельных прыжков . . . . .	146
4.6. Эксперимент . . . . .	151
<b>5. Рассеяние света в наноструктурах . . . . .</b>	<b>159</b>
5.1. Классификация механизмов рассеяния света в полупроводниках . . . . .	159
5.2. Простейшая осцилляторная модель рассеяния света . . . . .	159
5.3. Резонансная флуоресценция двухуровневых систем . . . . .	162
5.4. Рассеяние света на межподзонных возбуждениях . . . . .	164
5.5. Рассеяние света на размерно-квантованных оптических фононах в сверхрешетках . . . . .	165
5.6. Рассеяние света на «сложенных» акустических фононах . . . . .	168
5.7. Двойной оптический резонанс . . . . .	170
<b>6. Нелинейная оптика. Четырехволновое оптическое смешивание . . . .</b>	<b>173</b>
6.1. Нелинейность типа «насыщение двухуровневых переходов» . . . .	175
6.2. Нелинейность ангармонического вида . . . . .	178
6.3. Биекситонный механизм нелинейности . . . . .	178
6.4. Обсуждение результатов расчета . . . . .	179
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>181</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>184</b>

*Учебное издание*

*Леонид Евгеньевич Воробьев, Евгенийс Левович Ивченко,  
Дмитрий Анатольевич Фирсов, Вадим Александрович Шалыгин*

## **ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУР**

Редактор издательства Л. С. Тихомирова

Художник Л. А. Яценко

Технический редактор Е. В. Траскевич

Корректоры О. И. Буркова, И. А. Крайнева и Н. А. Тюрина

Компьютерная верстка Т. Н. Поповой

Лицензия ИД № 02980 от 06 октября 2000 г. Сдано в набор 10.10.2000.  
Подписано к печати 18.01.2001. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 10.7.

Тираж 1000 экз. Тип. зак. № 3521. С 283

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН  
199023, Санкт-Петербург, Менделеевская лин., 1  
nauka@aspid.nw.ru

Санкт-Петербургская типография «Наука» РАН  
199034, Санкт-Петербург, 9 лин., 12